

ГЛАВА 7. ДИНАМИКА КОРОТКОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА

7.1. Постановка динамической задачи

В науке о развитии систем рассматривается три типа объектов: системы пассивные, системы автономные и системы активные.

Пассивными называются системы, развитие которых происходит только за счет подвода энергии из окружающей среды. В дифференциальных уравнениях, описывающих процессы в таких системах, поступление энергии из среды, представляется членами, являющимися функциями независимой переменной, не содержащими обобщенные координаты. В динамических системах таким аргументом обычно является время. Колебания в пассивных системах возникают только под воздействием внешних управлений.

Системы автономные отличаются от пассивных тем, что они содержат источники энергии, расход которой определяется только состоянием внутренней среды объекта. В дифференциальных уравнениях, описывающих процессы в автономных системах управления, моделируются в виде функций обобщенных координат и не являются явной функцией времени. Отличительной особенностью автономных систем является наличие внутренних источников энергии и обратных связей, замыкающихся во внутренней среде.

Существуют системы, где движение формируется за счет одновременно действующих внутренних и внешних источников энергии. Такие системы в дальнейшем мы будем называть активными. В активных системах обратные связи управляют поступлением энергии от внутренних источников и могут управлять энергией: вводимой от внешних.

Экономика, в глобальном масштабе, система активная. Ее управление осуществляется как за счет внешних, так и за счет внутренних источников ресурсов, являющихся в общем случае носителем всех используемых в процессе развития видов энергии.

Внешней средой экономики служит природа. Цикличность природных явлений формирует внешнее управление и генерирует колебательные процессы в экономической системе. Но кроме колебаний, вызванных внешними для экономики воздействиями, в экономике возникают колебания, инспирированные внутренними механизмами, имманентно присущими экономике.

При анализе экономических процессов в зависимости от целей исследования из общей системы «экономика» выделяются подсистемы,

которые в соответствии с решаемыми задачами могут быть рассмотрены как: пассивные, автономные и активные.

В частности, производственное предприятие в общем плане должно быть рассмотрено как активная система, на которую воздействует как внешняя среда, состоящая из двух компонентов – природы и глобальной экономики, так и ресурсов, накопленных носителями энергии во внутренней среде. Поэтому предприятие должно быть рассмотрено как локальная подсистема активного типа. Но в зависимости от целей анализа они могут быть представлены и в виде пассивных или автономных систем.

В главах 5 и 6 рассмотрены стационарные процессы, объясняющие механизм возникновения, развития и спада отдельной короткой волны, определяемой закономерностями жизненного цикла товара на рынке.

Предполагалось, что факторы, определяющие развитие процессов становления волны со временем изменяются так медленно, что предприятия, производящие товар, в состоянии без запаздывания отслеживать потребность рынка. Иными словами было принято, что инерционные явления, наблюдаемые в любой реальной системе настолько малы, что их возможно из рассмотрения опустить. В действительности скорости и ускорения изменения параметров, характеризующих динамику технологических процессов могут существенно повлиять на структуру волны.

Причин несоответствия форм волны потребностей и волны поставок товара много. Например, при разработке технологических процессов нельзя пренебрегать запаздываниями, вызванными суточным и сезонным ритмами поступления сырья и комплектующих. Не менее важным фактором, вызывающим искажение формы волны поставок, является несовпадение жизненного цикла производства товаров и их потребления, на что было обращено внимание в главах 5, 6.

Идеальный же процесс производства должен обеспечить полное совпадение волны потребления и поставок. К сожалению, добиться такой гармонии невозможно. Чтобы максимально сократить расхождения, требуется учесть многие факторы, без которых наладить бездефицитное производство невозможно. Таких факторов, и объективных, и субъективных много. Только часть их была учтена в предыдущей главе.

Приступая к анализу взаимодействия производства и рынка, целесообразно предварительно их классифицировать.

Существуют три группы факторов, определяющих динамику производственного процесса.

К первой группе относятся ограничения технического характера. Из них важнейшими являются невозможность:

- мгновенно осуществить необходимую смену оборудования,
 - немедленно заставить в новом режиме работать разнообразное оборудование,
 - с первых же попыток исключить или довести до минимума количество брака,
 - наладить бесперебойное управление процесса производства,
 - выработать необходимые навыки персонала,
 - предотвратить амортизацию оборудования,
 - ликвидировать текучесть кадров
- и, конечно, недостаток капитала.

Ко второй – относятся субъективные промахи организаторов производства, их некомпетентность, нерешительность, неумение рисковать или чрезмерная неосмотрительность, неумение управлять коллективом работников, неспособность организовать снабжение и экспедицию готовой продукции.

К третьей – относятся причины социального порядка:

- конфликты между предпринимателями и персоналом,
- изменение законов о налогообложении,
- социальные конфликты в обществе,
- инфляция,
- изменение международных отношений,
- таможенная политика государства.

Все эти факторы взаимно коррелированы. Попытки их отражения в формализованной модели не могут быть успешными из-за их количественной неопределенности.

И все таки, организаторы производства, рассчитывающие успешно выйти на рынок должны все это учесть. Отдавая себе отчет в том, что формализованные методы не могут послужить панацеей на все случаи жизни, они ищут рациональное сочетание формализованных и эвристических подходов к решению задачи.

Современные системы планирования должны быть организованы так, чтобы в процессе выработки оптимального плана максимально использовались математические модели и интеллект человека.

Обычно, в математических моделях учитываются факторы первой группы. Следуя установившейся традиции в этой главе рассматриваются математические модели технологического процесса. Для учета не только формализуемых параметров разработаны некоторые деловые игры, примеры которых рассматриваются в конце работы.

На рис. 7.1 представлена схема определения потребностей с учетом объема рынка. Справа представлены блоки и классификации эн-

догенной информации. Данные собираются и обрабатываются системой маркетинга.

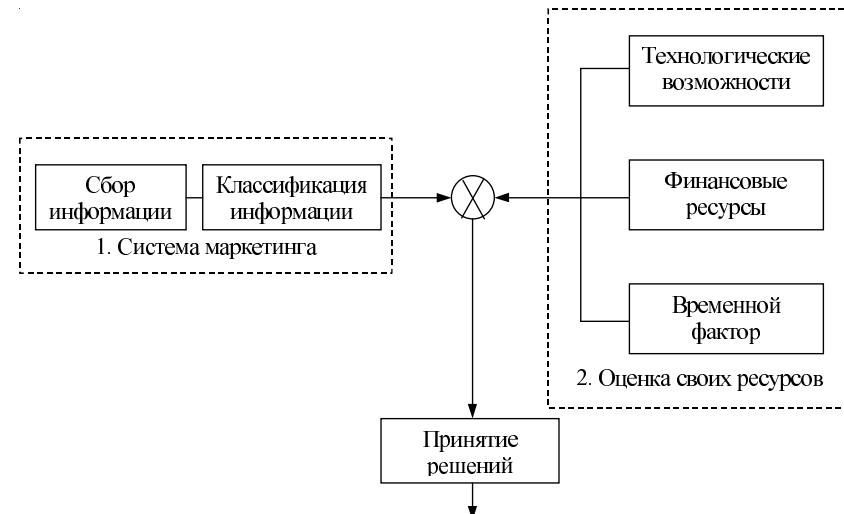


Рис. 7.1. Потребности с учетом рынка

Общей задачей экономической науки является построение оптимальной структуры производства, удовлетворяющего условию обеспечения максимальной прибыли.

К ее модели предъявляются ряд требований, из которых важнейшими являются:

- адекватность изучаемому объекту,
- возможность варьирования параметрами,
- простота интерпретации анализируемых процессов,
- однозначность полученных результатов.

Постольку, поскольку процессы подготовки производства и производства продукции являются функциями, меняющимися со временем, математическую модель организации производства, удовлетворяющую условию оптимальности, естественно искать в виде решения дифференциальных уравнений.

Для обоснованного суждения о классе моделирующих уравнений необходимо formalизовано определить цель исследований и предметную область, ограничивающую модель.

Целью исследования, как уже указывалось, является объяснение механизма возникновения волновых процессов и построение плана,

обеспечивающего максимальную прибыль предприятия при рациональной реализации располагаемых, ограниченных средств.

На начальных этапах расчета необходимо ответить на вопрос, каким потребностям рынка должна удовлетворить подготавливаемая к выпуску продукция?

Является ли целью производителя попытка полностью удовлетворить весь спектр потребностей или решается частная задача заполнения экономической ниши, образовавшейся в результате стохастического характера формирования рынка?

В первом случае в процессе планирования должна решаться вся совокупность технико-экономических задач, связанных с разработкой типоразмерного ряда изделий (глава 6). Но и во втором нельзя избежать их всестороннего изучения, так как только в результате такого анализа можно принять достаточно обоснованное решение. Анализ среды для каждого типа продукции должен завершаться построением кривых потребности в функции времени.

Полученную информацию для анализа удобно представить в виде наложения пары логистических функций, см. главу 5.

На следующем этапе подготовки производства решаются задачи:

- какова должна быть конструкция всего типоразмерного ряда или его отдельного элемента? (См. главу 6.),
- какова должна быть технология производства нового изделия?,
- в какой мере может быть использована существующая производственная база?,
- каковы ограничения, определяющие возможность конверсии существующего производства?,
- каков динамический процесс перехода на производство новой продукции?

В результате анализа предприниматель получит возможность ответить на главные вопросы:

- каковы шансы утвердиться на рынке?,
- какова ожидаемая прибыль?

7.2. Математическая модель элементов технологического процесса (Первое приближение)

Все факторы, предопределяющие успех предпринимаемых усилий, в конечном счете замыкаются в рациональной организации технологического процесса, способного в нужное время, в нужном объеме,

при минимальной себестоимости, гарантирующей максимальную прибыль, обеспечить выпуск и реализацию продукции.

Реальный технологический процесс серийного производства однородной продукции состоит из конечного множества переделов, составляющих ряд параллельных и последовательных производственных линий, совокупность которых образует технологический процесс в целом.

Число переделов обычно велико. Но на каждом рабочем месте операция осуществляется за счет приложения живого труда к подводимым ресурсам. Эффективность труда определяется совершенством оборудования. Модель рабочего места может быть представлена в виде динамического звена, которое имеет несколько входов и выходов. Входами являются каналы, через которые подаются предметы труда, энергия и другие ресурсы, включая живой труд и информацию. Выходами же служат каналы, через которые отводятся обработанные предметы труда и каналы, через которые удаляются отходы производства и происходит диссиляция энергии.

Все ресурсы, включая живой труд, вводимые в технологический процесс, в дальнейшем будем называть обобщенными силами.

Мерой успешности технологического процесса является качество и количество произведенной продукции. В дальнейшем будем считать, что качество определяется отношением количества ресурсов, обращенных в полезный продукт, обладающий заданными свойствами, к количеству преобразованных ресурсов, включая потери за счет брака. Тогда, мерой полезности, характеризующей работу системы, является количество готовой продукции нужного качества. Эту величину по аналогии с принятой в физических системах будем называть обобщенной координатой. Преобразование обычно растянуто во времени. Запаздывание, как это утверждалось выше, вызывается инерцией производственного процесса, присущей и оборудованию и оператору, работающему на этом оборудовании. Процесс превращения сопровождается рассеиванием части ресурсов, в том числе и труда, на образование брака, обрезей и других промышленных отходов, а также амортизацией средств производства. Величину, характеризующую потери энергии в физических процессах, по аналогии с терминологией, принятой в механике, будем называть диссиляцией.

Важнейшим параметром, характеризующим свойства рабочего передела являются производительность – способность преобразовать некоторое количество ресурсов в готовую продукцию. (Обычно производительность пропорциональна скорости технологического процесса).

Составляя дифференциальное уравнение следует позаботиться об выполнении условий известной теоремы Фурье об одинаковой

физической размерности всех слагаемых дифференциального уравнения.

Попытка индивидуального описания технико-экономических процессов на множестве рабочих мест, с учетом их физической сущности приводит к многообразию природных величин, что вынуждает вводить соответствующее количество измерительных шкал.

В физике и теории автоматического управления задача исключения множественности наименований однородных параметров решается путем использования их относительных значений. В нашем случае, когда рассматриваются технико-экономические процессы, более выгодным является предварительное введение единой экономической переменной – стоимости. В дальнейшем в качестве обобщенной силы будет принята единая количественная мера, характеризующая свойства проводимых ресурсов и живого труда. Такой мерой, общей для всех входных потоков является текущая цена ресурса.

Введение единого параметра – цены, значительно облегчает экономическую интерпретацию результатов, полученных на модели. Это позволяет все обобщенные силы, действующие на любой вход, суммировать. В дальнейшем обобщенные силы, действующие на все входы рабочего места, мы будем обозначать

$$F(t) = \sum_{\forall j} f_j(t), j \in \{0, \dots, J\}, \quad (7.1)$$

где $F(t)$ – цена суммарного ресурса, вводимого в описываемый объект, $f_j(t)$ – цена ресурса типа $j \in \{j\} = \{0, 1, \dots, J\}$, $\{j\}$ – перечень ресурсов. В $\{j\}$ входит и живой труд ($j = 0$).

Учитывая, что приложенные обобщенные силы должны уравновешиваться реакциями, возникающими в процессе производства продукции, следует предположить, что действующие силы должны быть равны сумме всех реакций.

$$F(t) = F_u(t) + F_g(t) + F_k(t), \quad (7.2)$$

где $F_u(t)$ – реакция, характеризующая сопротивление, вызванное инерцией процесса, $F_g(t)$ – реакция, вызванная производством и выдачей готовой продукции, $F_k(t)$, – реакция, вызванная накоплением ресурсов во внутренней среде системы. Перечисленные реакции, как и действующие обобщенные силы, изменяются со временем.

Обобщенная координата в таком случае должна характеризовать текущее количество произведенной продукции. Обозначим ее $x(t)$.

В механике фундаментальное значение играет величина

$\int_{t_0}^t F(t) dx(t)$ работа, которую сила $F(t)$ совершает при изменении обобщенной координаты.

В модели интеграл

$$A(t) = \int_{t_0}^t F(t) dx(t), \quad (7.3)$$

эквивалентный работе в физической системе, мы будем называть интегральной стоимостью произведенной продукции или капиталом.

В предложенной модели пока не отражен фактор, характеризующий увеличение расхода ресурсов в результате возрастания энтропии.

Инерционные явления в любой реальной системе определяются ускорением, возникающим в процессе движения, в нашем случае – процесса обработки. На рабочем месте инерция вызывает запаздывание, определяемое длительностью рабочего цикла. Реакцию, вызванную инерцией, представим в виде

$$F(t) = m(t)\ddot{x}$$

где $m(t)$ – масса обрабатываемой продукции, \ddot{x} – ускорение производственного процесса, размерность коэффициента m ,

$$[m] = \frac{[F][t]^2}{[x]}.$$

Примечание. В рационально созданных производственных системах по мере совершенствования процесса его инерция уменьшается, соответственно уменьшается и значение коэффициента m .

Рассматривая процесс переработки ресурсов и полуфабрикатов в готовую продукцию, следует помнить, что возможны многие способы учета реализации ресурсов в виде готовой продукции.

Заманчиво связать объем произведенной продукции с первой степенью скорости процесса. (Тогда, возможно построить линейчатую модель для описания многих динамических явлений). В этом случае, в модели факт выдачи готовой продукции в уравнении представляет членом

$$F_g(t) = g(t)x,$$

где $g(t)$ – коэффициент, изменяющийся со временем. Со временем этот коэффициент обычно растет, стремясь к пределу, определя-

емому производственной мощностью описываемого объекта. Его размерность

$$[g] = \frac{[F][t]}{[x]}.$$

Предложенное представление члена, отображающего отвод ресурсов, превращенных в готовый продукт из системы, при надлежащем выборе функции $g(t)$ удовлетворительно может описать динамику выпуска.

Таким образом в принятой модели стоимость ресурсов, отводимых во внешнюю среду в виде готовой продукции, в процессе производства является реакцией рабочего места, пропорциональной скорости обработки ресурсов.

Накопленный на рабочем месте задел – количество ресурсов $x(t)$, подлежащих переработке, определяется параметром $k(t)$, характеризующим способность рабочего места накапливать ресурсы. Коэффициент обратно пропорционален емкости запасников на рабочих местах

$$k = \frac{1}{c}.$$

Следовательно, количество (стоимость) ресурсов, накапливаемых в запасниках рабочего места в виде задела, определяется равенством

$$F_k(t) = k(t)x(t) = \frac{1}{c(t)}x(t).$$

Размерность коэффициента

$$[k] = \frac{[F]}{[x]}.$$

Теперь мы имеем возможность представить дифференциальное уравнение в виде

$$m(t)\ddot{x} + g(t)\dot{x} + k(t)x = \sum_j f_j(t). \quad (7.4)$$

Оно в первом приближении описывает процесс на рабочем месте. Полученное уравнение идентично уравнению любого колебательного звена с переменными параметрами, находящегося под воздействием внешних сил.

При написании этого уравнения предполагают, что изменение коэффициентов m, g, k со временем происходит независимо от изменения обобщенной координаты x , поэтому уравнение относится к классу линейных, описывающих неавтономные динамические системы. Отметим еще одну его особенность. Обычно при описании производственных процессов коэффициенты, характеризующие не стационарность процесса, изменяются монотонно и медленно. Что касается возмущающих сил, отображающих подвод ресурсов, то в зависимости от типа производственного процесса и физической природе ресурса, они меняются медленно или осцилируют. В последнем случае, как это будет показано дальше, амплитуда и частота осциляций может меняться, но их изменение обычно происходит медленно, соизмеримо со скоростью изменения коэффициентов m, g, k .

Малая скорость изменения коэффициентов позволяет во многих случаях динамический процесс рассмотреть в виде последовательности квазистационарных этапов с постоянными значениями параметров.

Модель производственного процесса, состоящего из последовательно подключенных элементов, можно представить как цепь передающих элементов, связанных друг с другом потоками информации или вещества.

В реальных процессах имеет место как тот, так и другой механизм воздействия. Выбор надлежащей модели играет решающую роль при анализе динамических явлений.

7.3. Квазистационарные режимы

Для дальнейшего полезно напомнить некоторые общеизвестные сведения о колебании элементарных систем, описываемых частной разновидностью уравнения (7.4). Пусть некоторые физические системы описываются дифференциальным уравнением (7.4). Предположим, что все его коэффициенты изменяются на много медленнее, чем происходит изменение обобщенной силы, которая представлена в правой части в виде осциллирующей функции

$$f(t) = A(t) \sin \omega t,$$

при этом коэффициент A , как и частота ω , меняются со скоростью, близкой к скорости изменения параметров m, g, k , изменение которых происходит так медленно, что в течение достаточно длительного промежутка времени их вариабельностью можно пренебречь. Режим при котором изменение параметров мало влияет на динами-

ческий процесс, будем называть квазистационарным. В квазистационарном режиме параметры m, g, k, A, ω можно считать постоянными. Тогда уравнение (7.4) обратится в уравнение обычного физического осциллятора, которое имеет вид

$$m_0 \ddot{x} + g_0 x + k_0 x = A_0 \sin \omega_0 t. \quad (7.5)$$

Нас пока интересуют только установившиеся процессы, поэтому сделаем еще одно предположение. Пусть рассматриваемый интервал времени $0 - \tau$, в течение которого параметры считаются постоянными, достаточно велик, чтобы в системе, описываемой уравнением (7.5), переходные процессы практически затухли.

Тогда выходная координата

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t - \varphi).$$

Определим частное решение, соответствующее возмущающей силе $A_0 \sin \omega_0 t$ и нулевым начальным условиям. Для этого построим векторную диаграмму установившегося процесса. Отложим на диаграмме величину

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

вдоль оси, направленной вертикально вверх. Сила реакции, вызванная накоплением задела, имеет амплитуду $k_0 x_0$ и направлена в прямо противоположном направлении относительно положительно го направления координаты x_0 . $k_0 x_0$ – величина, характеризующая сопротивление запасников, в которых накапливаются заделы.

$$F_k(t) = -k_0 x_0.$$

Вектор $F_g(t)$, представляющий реакцию сил сопротивления, вызванных выдачей готовой продукции, его модуль равен $g_0 x$. По фазе он опережает вектор $F_k(t)$ на $\pi/2$ радиан.

Сила инерции $F_m(t)$ имеет амплитуду $m_0 \omega_0^2 x_0$ и отличается по фазе от вектора $F_k(t)$ на один радиан. Возмущающая сила $A \sin \omega_0 t$ опережает обобщенную координату x_0 на угол, равный φ .

Диаграмма изображена на рис. 7.2.

Предположение о стационарности системы требует, чтобы сумма всех векторов была бы равна нулю. Это означает, что проекции суммы векторов сил как на вертикальную, так и на горизонтальную ось, должны равняться нулю. Отсюда следует

$$k_0 x_0 - m_0 \omega_0^2 x_0 - A_0 \cos \varphi = 0, \quad (7.6)$$

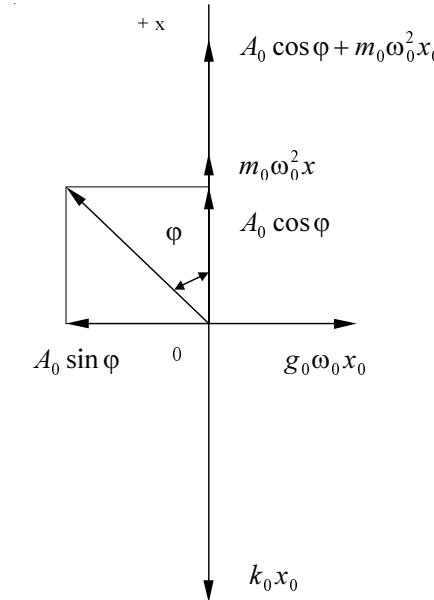


Рис. 7.2. Векторная диаграмма квазистационарного цикла

$$g_0 \omega_0 x_0 - A_0 \sin \varphi = 0. \quad (7.7)$$

Из этих уравнений

$$x_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(g_0 \omega_0)^2 + (k_0 - m_0 \omega_0^2)^2}}, \quad (7.8)$$

$$\tan \varphi = \frac{g_0 \omega_0}{k_0 - m_0 \omega_0^2}. \quad (7.9)$$

Равенства (7.8) и (7.9) называются резонансными характеристиками колебательного звена или его амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками.

Обычно равенства записываются в относительном масштабе, в форме

$$x_0 = \frac{A_0/k_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \left(2 \frac{g_0}{g_c} \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}}, \quad (7.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \frac{g_0}{g_c} \frac{\omega_0}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}, \quad (7.11)$$

где $\omega_c = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}$, $g_c = 2m_0\omega_c$.

Параметр $\omega_c = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}$ называется собственной частотой. Режим, когда $\omega_0 = \omega_c$, называется резонансным. Из равенства (7.11) следует, что при резонансе фазовый угол $\varphi = \pi/2$.

В системе, где $g_0 \neq 0$ максимум амплитуды наблюдается не в режиме резонанса, а при частоте

$$\omega_{\max} = \omega_c \sqrt{1 - 2 \frac{g_0}{\omega_0}}. \quad (7.12)$$

Резонансные характеристики изображены на рис. (7.3а) и (7.3б). Элементарная работа, произведенная периодической силой

$F(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, при изменении координаты x на малую величину $dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{dt} d(\omega_0 t) = x_0 \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t)$ равна $\Delta A = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \frac{dx}{dt}$.

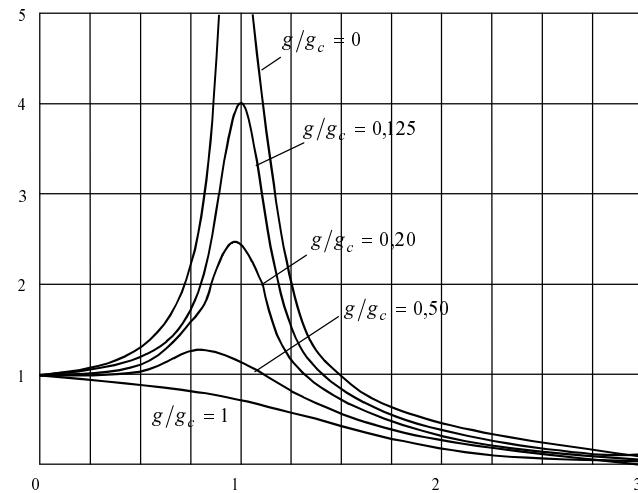


Рис. 7.3а. Амплитудно-частотные характеристики

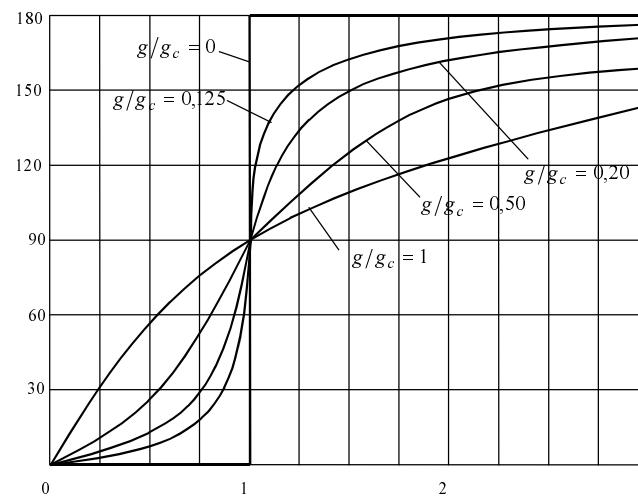


Рис. 7.3б. Фазово-частотные характеристики

За полный период колебаний работа представляется интегралом

$$\begin{aligned}
 A_{2\pi} &= \int_0^T F(t) \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi} F(t) \frac{dx}{dt} d(\omega_0 t) = \\
 &= \int_0^{2\pi} A_0 x_0 \cos(\omega_0 t) [\sin(\omega_0 t) \cos\varphi + \cos(\omega_0 t) \sin\varphi] d(\omega_0 t) = \quad (7.13) \\
 &= A_0 x_0 \cos\varphi \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) + A_0 x_0 \sin\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega_0 t) d(\omega_0 t).
 \end{aligned}$$

Так как первый интеграл равен нулю, после интегрирования выражение (7.13) запишем в виде

$$A_{2\pi} = \pi A_0 x_0 \sin\varphi, \varphi = f(g_0). \quad (7.14)$$

При отсутствии сопротивления, пропорционального скорости, угол Φ и работа силы $F(t)$ равна нулю. Это возможно, когда составляющая векторной диаграммы

$$g_0 \omega_0 x_0 = 0,$$

что может иметь место при условии $g_0 = 0$.

Таким образом, уравнение (7.5) описывает внутренние процессы, происходящие в моделируемом объекте, а работа за полный цикл, определяемая формулой (7.14), отображает цену выданной продукции. Как видно из формулы, ее величина при прочих равных условиях определяется только значением коэффициента g_0 , характеризующим влияние скорости процесса на преобразование ресурсов в продукцию. На векторной диаграмме, рис. 7.2, часть ресурсов, преобразуемая в продукцию, представлена вектором $F_g(t) = g_0 \vec{x}$, остальная часть ресурсов, цена которых определяется суммой ~~$m_0 \vec{x} + kx$~~ , остается во внутренней среде предприятия, где она под воздействием живого труда превращается в продукцию.

При составлении модели в виде уравнения (7.5) в нее не был введен член, характеризующий энтропийные процессы. Это делает модель не адекватной объекту. Поэтому дальнейшее использование этой модели без надлежащих корректировок нецелесообразно.

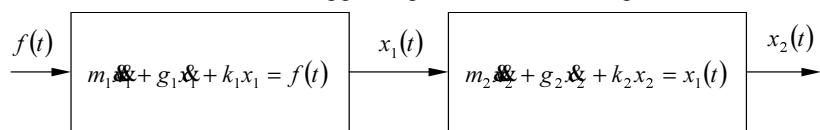


Рис. 7.4. Фрагмент линейной цепи, передающей информацию

7.4. Особенности квазистационарного режима функционирования системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением второго порядка

Несовершенство модели, представленной уравнением (7.8), вынуждает искать более сложные математические образы, способные полнее отразить особенность реального технологического процесса.

С этой целью обратим внимание на энергетические и информационные процессы, наблюдаемые на рабочих местах, где осуществляются технологические операции.

Как уже отмечалось, любое рабочее место имеет вход, через который вводятся ресурсы. Под воздействием преобразующей системы ресурсы частично преобразуются в готовый продукт, а другая их часть рассеивается в виде отходов и брака. Значительная часть потока ресурсов, вводимого в систему, остается во внутренней среде рабочего места, где происходит ее преобразование в готовый продукт.

Следовательно, вводимый материальный поток расщепляется на три части. В модели рассмотренной в предыдущем разделе рассматриваются только две из трех составляющих - составляющая, находящаяся в стадии превращения и составляющая обращенная в готовую продукцию, выданную во внешнюю среду. Первая остается в преобразователе. В модели она представлялась в виде суммы ~~$m_0 \vec{x} + kx$~~ , а вторая (пропорциональная обобщенной скорости преобразования, представленная членом $g\vec{x}$) моделирует поток готовой продукции, отводимой из системы. Третья часть, моделирующая неидеальность производственного процесса, в этой модели не учитывалась. Игнорированные фактами диссипации даже при рассмотрении процесса в первом приближении принципиально исказят результаты исследований. С целью уточнения модели рассмотрим возможные подходы к построению математического описания, способного отразить все составляющие производственного процесса.

Оценивая возможные модели, наряду со стремлением выбрать наиболее адекватный вариант, необходимо позаботиться о простоте его последующего анализа. В этих условиях естественно проверить возможность использования теории линейных цепей.

На рис. 7.4. изображен элемент передающей цепи линейного контура регулирования - два последовательно включенных колебатель-

ных звена. На вход первого поступает внешнее возмущение, которое после преобразования в первом, с его выхода подается на вход последующего. В этой системе энергия (материальный поток) из внешней среды подводится к первому звену, ее часть аккумулируется в звене, а другая, пропорциональная члену $g_0 \dot{x}_1$, отводится в среду.

Система уравнений, описывающая процессы в фрагменте цепи, имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + g_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 &= f_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + g_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 &= x_1(t). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Конструкция этих уравнений такова, что связь между последовательно включенными звеньями осуществляется только за счет односторонней передачи информации от первого звена ко второму.

Что касается преобразования материальных потоков, то в звеньях цепи они преобразуются независимо.

Чтобы убедиться в правильности этого утверждения положим во втором из уравнений $x_1(t) \equiv 0$. Приравнивание к нулю координаты x_1 во втором уравнении ни как не отразится в решении первого. Следовательно, наличие или отсутствие второго звена (в рассматриваемом случае приемника) никакого влияния на поведение источника (звена I) не имеет. Процессы в первом звене также никаким образом не изменятся, если к входу второго дополнительно подключить любой источник, подводящий входной поток, изменяющийся по закону $x_1(t)$.

Все это означает, что источник, действующий на входе второго звена, черпает ресурсы не из первого звена, а из независимого резервуара.

Графически, приведенные выше рассуждения удобно иллюстрировать системой изображенной на рис. 7.5, где помимо звеньев I и II цепи изображен идеальный источник бесынерционного потока бесконечной мощности, пытающий через безынерционную заслонку, регулирующую вход второго звена. Управление заслонки осуществляется в соответствии с информацией о значении координаты $x_1(t)$. Следовательно, уравнения (7.5) не могут моделировать процесс обработки потока непосредственно поступающего от первого звена ко второму, если в моделируемом объекте диссипация потока пропорциональна обобщенной координате, так как вся энергия (материя), кроме части превращенной в готовый продукт, накапливается в емкостном элементе, остается во внутренней среде и участвует в процессе преобразований.

Для моделирования процесса обработки потока в двух последовательных звеньях технологической цепи не может быть использована и цепь пассивных элементов, описываемая уравнениями типа

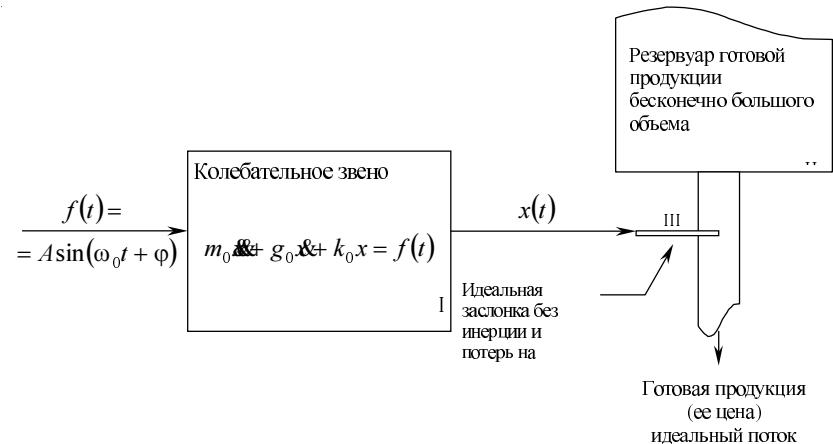


Рис. 7.5. Физическая модель уравнения 8.15.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + g_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{12} (x_1 - x_2) &= f_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + g_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{12} (x_1 - x_2) + k_{20} x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (7.16)$$

механическая интерпретация которой приведена на рис. 7.6.

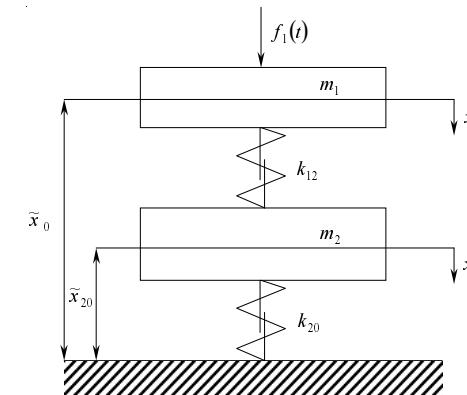


Рис. 7.6. Фрагмент механической цепи, передающей поток энергии в двух направлениях

Здесь, хотя за счет передающего элемента k_{12} , имеет место передача потока энергии от предшествующего элемента к последующему, это движение обратимо. Направление потока определяется знаком разности координат $x_1(t) - x_2(t)$.

Рассматривая любую цепочку, образованную из последовательно включаемых пассивных звеньев, нетрудно убедиться в невозможности моделировать диссиацию энергии, если ее связать с любым из членов уравнения (7.16). Такое ограничение определяется не только тем, что не увеличивая размерность системы нельзя разделить потоки пропорциональные величинам X_1 или X_2 на две части. Другая трудность заключается в учете направленности энтропийных процессов.

Чтобы отразить этот факт в модели кроме дополнительных степеней свободы, включают вентильные элементы. В результате уравнения, описывающие динамику процесса, приобретают свойство нелинейности, что при имитировании многомерных систем сильно усложняет исследование.

7.5. Использование для моделирования дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами

Во многих случаях математическое описание системы можно значительно упростить введением комплексных коэффициентов в дифференциальные уравнения. Для подтверждения продуктивности такого подхода предварительно рассмотрим некоторые свойства решения дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} + g_1(1 + ig_0)\dot{x} + k_1(1 + ik_0)x = f(t). \quad (7.17)$$

Чтобы выяснить возможность открывающейся с введением комплексных коэффициентов сначала исследуем влияние члена ik_1k_0 на решение уравнения (7.14). С этой целью рассмотрим уравнение

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + k_1(1 + ik_0)x = A_0 \sin \omega_0 t. \quad (7.18)$$

Проанализируем частное решение, соответствующее правой части уравнения (7.18), предположив, что система функционирует в квазистационарном режиме.

Ограничиваюсь квазистационарным режимом, мы должны принять, что кроме постоянства коэффициентов m , g , k_1 , k_0 , постоянны и коэффициенты ω_0 и A_0 . Начальные условия примем равными нулю. Количество ресурсов, обращенных в полезную продук-

цию, больше рассеянной в результате износа оборудования, пока будем считать равным $k_1k_0 > g_0\omega_0$.

7.6. Анализ модели технологического объекта, представленной в виде линейного дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом при обобщенной координате

Рассмотрим уравнение (7.18), где по условию коэффициенты m_0 , g_0 , k_1 , k_0 , ω_0 , A_0 суть величины постоянные, i – мнимая единица. Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} & m\ddot{x} + E_1\dot{x} + E_2(k_\alpha + ik_\beta)x = E_4 \sin \omega_0 t, \\ & E_1 = \frac{g_1}{m_0} > 0; E_2 = \frac{k_1}{m_0}; E_4 = \frac{A_0}{m_0}; \quad g_0 = 0; \\ & k_\alpha = 1; k_\beta = k_0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Предметом анализа является стационарный процесс. Как и при построении резонансных кривых, система с действительными коэффициентами, нас интересуют амплитудные и фазовые частотные характеристики, определяющие динамические процессы в квазистационарных режимах, описываемых обыкновенным уравнением (7.18).

Чтобы освободиться от комплексных коэффициентов и определить условия устойчивости, левую часть уравнения (7.19), в которой переменную представляем в виде

$$\varphi = u + iv \quad (7.20)$$

Подставив эти значения в левую часть уравнения (7.18), положив в правой части коэффициент $A_0 = 0$, сгруппируем действительные и мнимые составляющие. Получим два уравнения

$$\begin{aligned} & E_1u + E_2k_\alpha u - E_2k_\beta v = 0; \\ & E_1v + E_2k_\alpha v - E_2k_\beta u = 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Введем переменные

$$\begin{aligned} x_1 &= u; \quad x_2 = v, \\ x_3 &= x_1; \quad x_4 = x_2. \end{aligned} \tag{7.22}$$

С учетом принятых обозначений запишем:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3; \\ x_2 &= x_4; \\ x_3 &= -E_2 k_\alpha x_1 + E_2 k_\beta x_2 - E_1 x_3 \\ x_4 &= -E_2 k_\beta x_1 - E_2 k_\alpha x_2 - E_1 x_4. \end{aligned} \tag{7.23}$$

или в матричной форме

$$\dot{x} = Ax.$$

Здесь уместно отметить, что введение комплексного коэффициента повышает размерность уравнения. Иначе говоря, использование комплексных коэффициентов эквивалентно повышению числа степеней свободы системы в два раза.

Собственные числа λ этого уравнения удовлетворяют матричному уравнению $\|A - \lambda I\| = 0$, где I – единичная матрица. Уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -E_2 k_\alpha & E_2 k_\beta & -E_1 - \lambda & 0 \\ -E_2 k_\beta & -E_2 k_\alpha & 0 & -E_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{7.24}$$

откуда

$$\lambda^2(E_1 + \lambda)^2 + 2E_2 k_\alpha \lambda(E_1 + \lambda) + E_2^2(k_\alpha^2 + k_\beta^2) = 0 \tag{7.25}$$

Введем переменную

$$\mu = \lambda(E_1 + \lambda)$$

и перепишем биквадратное уравнение в форме

$$\mu^2 + 2E_2 k_\alpha \mu + E_2(k_\alpha^2 + k_\beta^2) = 0.$$

Откуда

$$\mu_{12} = -E_2 k_\alpha \pm \sqrt{E_2^2 k_\alpha^2 - E_2^2(k_\alpha^2 + k_\beta^2)} = -E_2(k_\alpha \pm ik_\beta)$$

или

$$\lambda_{1,4} = -\frac{E_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_1}{2}\right)^2 - E_2 k_\alpha \pm iE_2 k_\beta}.$$

Следует особо отметить, что у уравнения (7.20) две пары комплексно-сопряженных корней, у которых мнимые части равны, но вещественные отличаются.

Определим границу устойчивости. Условием устойчивости является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения. Следовательно для всех корней $\lambda_j, j = 1, 4$ они должны быть меньше нуля. Это означает, что на границе устойчивости корни должны быть мнимыми, или

$$\lambda_j = ic_j, j = \overline{1, 4}, \tag{7.26}$$

где c_j – действительные
Откуда следует

$$ic + \frac{E_1}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{E_1}{2}\right)^2 - E_2 k_\alpha \pm iE_2 k_\beta}.$$

После возведения в квадрат и разделения мнимых и вещественных частей уравнения значения удовлетворяющие условию (7.26) будут

$$c^2 = E_2 k_\alpha; c = \pm \frac{E_2}{E_1} k_\beta. \tag{7.27}$$

Приоровняв полученные значения величины определим границу устойчивости в виде

$$E_2 k_\beta^2 = E_1^2 k_\alpha; E_1 > 0. \quad (7.28)$$

Откуда условием устойчивости является

$$E_2 k_\beta^2 < E_1^2 k_\alpha; E_1 > 0. \quad (7.29)$$

Из этого следует важный для дальнейшего вывод: в случае, если $E_1 \equiv 0$, система описываемая уравнением (7.18), при $A_0 \equiv 0$ не может быть устойчивой.

Последнее ставит под сомнение утверждение авторов работ [1], [2] о возможности использования уравнения (7.18), при $E_1 \equiv 0$ для описания устойчивых динамических процессов в механических системах.

Для наших задач важно разобраться с возможностью использования уравнений с комплексными коэффициентами для анализа рабочих процессов.

Анализируя производственный процесс на отдельном рабочем месте мы ограничились рассмотрением квазистационарного режима, описываемого дифференциальным уравнением (7.18) с постоянными коэффициентами.

Реальное производство отличается тем, что его параметры со временем меняются. Поэтому более адекватным реальному процессу является уравнение с переменными коэффициентами

$$m(t) + g(t) + k_1(t)[1 + ik_0(t)] = f(t), \quad (7.30)$$

которое может отразить многие нестационарные явления, особенно при попытке длительного моделирования, таких объектов, как производственные процессы функционирующих предприятий.

Этим вопросам посвящены следующие разделы настоящей главы.

7.7. Математическая модель однопродуктового предприятия

Уравнение (7.30) и его частная разновидность (7.18) и (7.20) были составлены для описания процессов, наблюдаемых на отдельном рабочем месте.

С определенной степенью приближения уравнение такой же структуры можно использовать для описания динамических процессов в любом однопродуктовом производственном объекте, если представить его в виде целого, неделимого на составляющие агрегаты и элементы.

Принимая такой подход нужно помнить, что представляя столь сложный объект, как предприятие, в виде динамического элемента, имеющего только одну степень свободы и сосредоточенные параметры, исследователь из рассмотрения исключает множество явлений, характеризующих локальные процессы, протекающие во внутренней структуре объекта. Однако, при анализе взаимодействия однопродуктового предприятия с рыночной средой, такие упрощения мало отражаются на общем результате, особенно, если влияние эндогенных факторов удается учесть при определении основных параметров, характеризующих важнейшие свойства объекта.

Более существенным является то, что при анализе рассматривались квазистационарные режимы функционирования, тогда как многие предприятия работают в нестационарных условиях.

В дальнейшем предприятие будет описываться уравнением (7.30). Для идентификации такой модели следует более подробно рассматривать изменения переменных: обобщенных сил, обобщенных координат, обобщенной работы, а так же параметры $m(t)$, $g(t)$, $k(t)$.

Начнем с рассмотрения законов изменения коэффициентов.

Наблюдение за реальными производственными процессами показывают, что с течением времени инерция производства в уравнении может быть описана параметром $m(t)$. При этом длительность циклов с течением времени сокращается, чему соответствует уменьшение коэффициента $m(t)$. Этот коэффициент со временем асимптотически приближается к некоторому предельному значению m_0 .

Такой характер изменения коэффициента $m(t)$ отражает результат совершенствования технологического режима. Напомним, две причины вызывают процесс изменения параметра. Первая определяется исключением органических недостатков процесса, а вторая – устранением организационных неурядиц, возникающих на начальных этапах запуска в работу любой большой технико-экономической системы.

Перечисленные особенности достаточно полно описываются зависимостью

$$m(t) = m_0 + \frac{m_1}{1 + m_2 t}. \quad (7.31)$$

Наличие трех констант m_0 , m_1 , m_2 в функции (7.31) позволяет с необходимой для наших целей степенью точности отобразить важнейшие особенности переменного коэффициента $m(t)$ и обосновы-

вает возможность его использования для моделирования процесса выдачи готовой продукции в экзогенную среду.

Коэффициент $g(t)$ со временем обычно увеличивается и по истечению некоторого времени его значение делается максимальным. Эти условиям соответствует функция

$$g(t) = g_0 - \frac{g_1}{1 + g_2 t}. \quad (7.32)$$

Для дальнейшего анализа особый интерес представляет переменный коэффициент $k(t)$.

Как отмечалось выше, для того, чтобы в модели учесть возможность диссипации ресурсов, этот коэффициент следует представить в виде комплексной функции

$$k(t) = k_1(t)(1 + ik_0), \quad (7.32)$$

где $k_1(t)$ – параметр, характеризующий эффективность преобразования в полуфабрикат накапливаемый в запасниках технологических линий, а коэффициент $k_0(t)$ возможно использовать для моделирования диссипации потоков.

Значение коэффициента $k_1(t)$ со временем должно расти до определенного значения, соответствующего оптимальному режиму работы предприятия. В дальнейшем этот коэффициент мы будем представлять в виде функции

$$k(t) = \kappa_0 + \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_2 t}$$

и, следовательно $k(t)$ будет представляться формулой

$$\kappa(t) = \left[\kappa_0 + \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_2 t} \right] (1 + ik_0). \quad (7.34)$$

Приняв, как и при составлении дифференциального уравнения отдельного рабочего места за обобщенные силы цену ресурсов, вводимых в производственный процесс, представим ее в виде составляющих

$$F(t) = F_0(t) + \sum_i f_j(t), j \in \{0, 1, K, j, K, J\},$$

где $F_0(t)$ – цена всех медленно меняющихся составляющих, $f_j(t)$ – цена ресурсов, изменяющихся в течение одного производственного цикла. Здесь $f_0(t)$ – цена живого труда.

В медленно меняющуюся составляющую $F_0(t)$ включена стоимость основных фондов.

С отрицательным знаком в эту функцию входят амортизационные расходы на совершенствование и модернизацию, переподготовку кадров, совершенствование и модернизацию производства, на содержание службу ремонта и модернизацию оборудования, а также на рекламирование продукции, издержки на социальное развитие и страхование, налоговые отчисления, проценты на кредиты и т.д. Учитывая небольшую скорость изменения функции $F_0(t)$ и ее ограниченность в течение жизненного цикла, в дальнейшем ее будем представлять в виде полинома сравнительно невысокой степени, например, третьей.

Тогда,

$$F_0(t) = \sum_i F_{0i}(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3.$$

Для наглядности мы рассматриваем штучное производство, характерное для машиностроительной и приборостроительной промышленности, где процесс осуществляется циклически, что и является основанием для предположения об осциллирующем характере текущей цены используемых ресурсов, поступающих в технологический процесс.

Учитывая наличие страховых запасов и технологических составляющих, стоимость оборотных циклов в дальнейшем будем описывать функцией

$$f(t) = \sum_i f_j(t) = \psi_0(t) + \sum_j \rho_j(t) \sin \int_0^t \omega_j(t) dt,$$

где $\psi_0(t)$ – стоимость запасов нерабочего задела,

$\rho_j(t)$ – амплитудное значение цены, j -й составляющей ресурса,

$\omega_j(t)$ – угловая частота поступления j -го ресурса.

Если для упрощения записать $\int_0^t \omega_j(t) dt = \Theta_j(t)$, $\forall j \in \{0, K, m\}$, то выражение $f(t)$ получит вид

$$f(t) = \psi_0(t) + \sum_{\forall j} \bar{\rho}_j(t) \sin \Theta(t).$$

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Частота $\omega_j(t)$ переменных $\rho_j(t)$ со временем меняется, так как в зависимости от рыночной конъюнктуры потребность в продукции, а стало быть в количестве ресурсов, перерабатываемых в единицу времени.

Амплитуды также меняются в зависимости от изменения рыночной цены соответствующего ресурса, а также от изменения величины выпускаемой партии изделий.

Спрос представлен в виде логистической функции, адекватно отражающей потребности рынка. Таким образом, в некоторых последующих моделях будет принято

$$\rho_j(t) = \begin{cases} \frac{\rho_{j1}c_j}{1 + \rho_{j2}e^{-\rho_{j3}t}}, & 0 \leq t < \tau, \quad \rho_{j1}, \rho_{j2}, \rho_{j3} = \text{Constant} \\ \frac{\rho_{j1}c_j}{1 + \rho_{j2}e^{-\rho_{j3}\tau}} + \frac{\rho_{j1}c_j}{1 + \rho_{j2}} - \frac{\rho'_{j1}c_j}{1 + \rho'_{j2}e^{-\rho'_{j3}t}}, & t \geq \tau \end{cases} . \quad (7.35)$$

Теперь мы имеем возможность записать уравнение функционирования многопродуктового предприятия в виде

$$\left(m_0 + \frac{m_1}{1 + m_2 t} \right) \ddot{x} + \left(g_0 - \frac{g_1}{1 + g_2 t} \right) \dot{x} + \left(\kappa_0 + \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_2 t} \right) (1 + ik_0) x_0 = (\varphi_0 + \psi_0) + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3 + \sum_j \rho_j(t) c_j \sin \Theta(t) = F(t) + \Psi(t). \quad (7.36)$$

Полученное дифференциальное уравнение отражает важнейшие технико-экономические процессы, наблюдаемые в течение полного жизненного цикла продукции однопродуктового предприятия, работающего на рынок.

В процессе анализа особенно сложно определение законов изменения функции в случае, когда на входе системы действует осциллирующая функция переменной частоты. Получить общее решение такого уравнения при произвольном законе изменения круговой частоты действующей силы с помощью элементарных функций невозможно и почти всегда бесполезно, так как после определения решения в общем виде при анализе конкретных ситуаций расчетчики вы-

нуждены решения строить с помощью нетабулированных специальных функций.

К счастью, при анализе производственного процесса целью расчетов является не определение мгновенных значений обобщенных координат, а выяснение знаков их изменения в течение более продолжительных циклов, диктуемых рыночной конъюнктурой. Это позволяет ограничиваться рассмотрением огибающих переходных процессов.

Для такого анализа запишем дифференциальное уравнение (7.36) в виде

$$\ddot{\varphi} + E_1 \dot{\varphi} + E_2 (1 + ik_0) \varphi = \sum_i E_i \sin(\Theta(t)) + F(t), \quad (7.37)$$

где

$$E_1 = \frac{g(t)}{m(t)}; \quad E_2 = \frac{k_1(t)}{m(t)}; \quad E_i = \frac{\rho_i(t)c_i}{m(t)}, \quad i \in \{4, K, n+3\}$$

Основную трудность представляет определение огибающей быстро осциллирующей составляющей переменной частоты. Анализируя модель учтем, что уравнение линейно. Следовательно, частные решения, соответствующие слагаемым первой части, могут быть рассмотрены независимо. Для определения частного решения, соответствующего члену

$$E_i(t) \sin(\Theta(t)), \quad i \in \{3, \dots, n+2\},$$

запишем уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + E_1(t) \dot{\varphi} + E_2(t) (1 + ik_0) \varphi = E_i \sin(\Theta(t)), \quad (7.38)$$

частное решение которого представим в виде

$$\varphi_i(t) = [x_1(t) + ix_2(t)] [\cos(\Theta(t)) + i \sin(\Theta(t))].$$

Представим его в уравнение (7.38) и приравняв коэффициенты при $\cos(\Theta(t))$ и $\sin(\Theta(t))$ получим систему

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + E_1 \dot{x}_1 + (E_2 - \omega^2) x_1 - 2\omega \dot{x}_2 - (\dot{\varphi} + \omega E_1 + E_2 k_0) x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + E_1 \dot{x}_2 + (E_2 - \omega^2) x_2 + 2\omega \dot{x}_1 + (\dot{\varphi} + \omega E_1 + E_2 k_0) x_1 &= -E_i, \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\text{где } \omega = \frac{d\Theta}{dt}$$

Эта система является уравнениями, описывающими огибающую процесса. Ее решение можно получить любым численным методом. Например, методом Хемминга.

Однако, чтобы получить полное решение системы, необходимо определить начальные условия. Сложность заключается в том, что нулевым начальным условием исходного уравнения в общем случае не соответствуют нулевые же условия системы (7.39). Это в дальнейшем при численном решении задачи потребует специального анализа внешних условий.

7.8. Рыночная стоимость продукции и ее себестоимость

Прежде чем перейти к окончательной интерпретации результатов, которые можно получить с помощью предлагаемой математической модели, уместно порассуждать о механизме превращения стоимости ресурсов в стоимость готовой продукции.

В результате процесса преобразования ресурсов в продукцию происходит изменение их стоимости. Следовательно, материальный баланс нарушается.

Готовая продукция стоит дороже суммы стоимостей, ее составляющих. Чтобы учесть эту коренную особенность экономического процесса, необходимо сделать соответствующие комментарии, а именно: учесть в уравнении то обстоятельство, что в процессе превращения живого труда в прошлый, его стоимость изменяется в зависимости от того, какова потребность в данном продукте труда. Для учета субъективного фактора человеческой переоценки стоимость готовой продукции, координату $x(t)$ умножим на коэффициент $\xi(t)$ величину, которую мы будем называть коэффициентом прибавочной стоимости. Изменение стоимости отнюдь не является бесспорным физическим фактом. Оно отражает субъективную, с позиции общества, прагматическую оценку цены продуктов труда. Эта оценка не является фундаментальным свойством материи и поэтому в расчеты параметр вводится только после анализа конкретной рыночной ситуации.

Коэффициент является одной из частных форм учета нормативного коэффициента самоокупаемости, с которым он связан равенством

$$\xi(t) = f(1 + \chi). \quad (7.40)$$

Формально такая переоценка в уравнении (7.40) вводится за счет двух представлений о цене труда, реализованного в себестоимости, и рыночной цене, которая будет назначена при реализации готовой продукции.

Условно эту переоценку можно представить в виде блок-схемы, изображенной на рисунке 7.7.

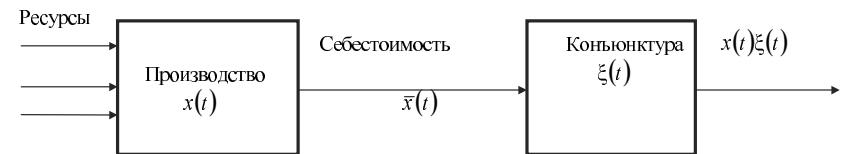


Рис.7.7. Учет рыночной конъюнктуры

Доход – капитал, накопленный в результате функционирования предприятия, – определяется интегралом

$$D = \int_0^T F(t) d\bar{x}(t) = \int_0^T F(t) \frac{d}{dt} [\xi(t)x(t)] dt, \quad (7.41)$$

где

$$\bar{x}(t) = \xi(t)x(t).$$

Себестоимость продукции равна величине

$$S = \int_0^T F(t) dx(t) = \int_0^T F(t) \frac{d}{dt} \bar{x}(t) dt. \quad (7.42)$$

Прибыль

$$\pi(T) = D(T) - S(T) \quad (7.43)$$

и эффективность

$$\mathcal{E} = \frac{\int_0^T F(t) \frac{d}{dt} [\xi(t)\bar{x}(t)] dt}{\int_0^T F(t) \frac{d}{dt} \bar{x}(t) dt}. \quad (7.44)$$

Прибыль используется для поощрения персонала, расширения производства, для осуществления социальных программ и для уплаты налогов.

Обозначим веса соответствующих составляющих:

$\pi_1 = \Delta_1(t)\Pi(t)$ - доля прибыли, затраченная на поощрение персонала,

$\pi_2 = \Delta_2(t)\Pi(t)$ - доля, затраченная на социальное страхование,

$\pi_3 = \Delta_3(t)\Pi(t)$ - доля вложения в развитие производства,

π_4 - доля, затраченная на покрытие налогов.

В дальнейшем предполагается, что они определены в результате специальных расчетов. Более подробно эти составляющие будут исследованы ниже.

Отметим, однако, что введение множителя $\xi(t)$ никаких дополнительных трудностей при моделировании не вызывает.

7.9. Модель многопродуктового предприятия

Для описания многопродуктового предприятия воспользуемся методом Лагранжа.

Чтобы применить этот метод необходимо найти аналоги для кинетической и потенциальной энергии физической системы, а также построить систему обобщенных сил, определяющих динамические процессы.

Предварительно определим принципиальное отличие между многопродуктовой и монопродуктовой производящей системой. Напомним, что в однопродуктовом предприятии в качестве единственной обобщенной координаты было достаточно рассматривать количество выпущенной продукции. Для описания состояния многопродуктовой системы нельзя ограничиться одной общей координатой. Число обобщенных координат, характеризующих успех деятельности предприятия, естественно выбрать равным числу типов продукции, производимой предприятием. Это условие означает, что каждому типу производимой продукции соответствует свой замкнутый цикл, аналогичный циклу монопродуктового производства. Но при этом предполагается, что смежные контуры системы содержат общие ветви.

Пусть количество обобщенных координат (число типов продукции) равно n . Обозначим их в виде составляющих вектора X , представленного матрицей

$$X = \|x_1, \dots, x_n\|^T,$$

где каждая составляющая соответствует одному из типов производимой продукции.

Обобщенные силы представим вектором

$$f(t) = \|f_{ij}(t)\|^T, i \in \{1, \dots, n\}; j \in \{1, \dots, J\}, \quad (7.45)$$

где индекс j - соответствует номерам ресурсов, используемых для производства продукции i -го типа. Как и в модели монопродуктового предприятия, стоимость любой составляющей вектора ресурсов примем равной его текущей цене. Тогда за аналогию обобщенной работы примем капитал, равный интегралу по времени скалярного произведения вектора обобщенных сил на вектор приращения обобщенных координат

$$\mathcal{D} = \int_0^T F(t) \frac{dX}{dt} dt.$$

Примем также, что производство каждого из типов продукции осуществляется технической системой, которая представляется в виде одного контура передающей сети, состоящей из ряда взаимосвязанных контуров, каждый из которых может иметь независимый вход и выход, содержит производственные объекты, характеризуемые его особенностью с некоторым запаздыванием преобразовывать ресурсы в готовую продукцию, выдавать продукцию в окружающую среду или накапливать в запасниках задел в виде полуфабрикатов, преобразуемых в продукцию, и рассматривать некоторое количество ресурсов в результате энтропийных процессов.

Как утверждалось выше, для построения математической модели воспользуемся методом Лагранжа, применяемым для построения дифференциальных уравнений второго рода.

Чтобы это было возможно, необходимо определить:

- обобщенные координаты;
- обобщенные силы;
- инерционные члены;
- элементы, где происходит диссипация ресурсов;
- элементы, выдающие продукты;
- элементы, накапливающие ресурсы внутри производящей системы.

В качестве обобщенных координат, как и при рассмотрении однопродуктовой системы, выберем стоимость текущих объемов производимой продукции. Обобщаемыми силами в технико-экономической системе, как и в технологической, будем считать текущую цену вводимых ресурсов. За меру инерции, характеризующей производственный процесс в модели, примем запаздывание реакции

предприятия на изменение вводимых ресурсов. В дальнейшем она обозначены m_{ij} .

Производственный процесс изготовления каждого типа изделий сопровождается выдачей готовой продукции. В уравнениях количество выдаваемой готовой продукции принимается пропорциональной скорости технологического цикла обращения цены ресурсов в стоимость продукции $g\dot{x}$ и коэффициенту производительности g_i . В процессе переработки ресурсов они частично, в виде заделов, отходов и брака накапливаются в запасниках рабочих мест. Коэффициент характеризующий способность системы накапливать задел, обозначается k_{1ij} , а диссипацию ресурсов во внутренней среде будем считать пропорциональной мнимым коэффициентам k_{0ij} k_{1ij} .

Во всех обозначениях параметров элементов индексы означают:

i – номера обобщенных координат, взаимное влияние которых определяется соответствующими элементами;

x_j – текущая цена задела в j -м запаснике, соответствующем j -й координате.

По аналогии с физическими системами выражение для определения удвоенного значения энергии движения (в нашем случае – стоимости ресурсов находящихся в процессе обработки) запишем в виде

$$2T = \sum_{i,p} m_{ip}(t) \dot{x}_i \dot{x}_p, \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \dot{x}_p = \frac{dx_p}{dt}, \quad (7.46)$$

$$i, p \in \{i\},$$

где x_i, x_p – обобщенные координаты.

Здесь нуждается в пояснении обозначение $m_{ip}(t)$. В электромеханических системах таким образом обозначаются взаимная индукция и взаимная масса – элементы типа реального рычага или трансформатора. В технико-экономических системах аналогом такого элемента является взаимная корреляция инерции подразделений, производящих два типа продукции. В случае, когда $p = 0$, выражения для m_i получают вид

$$m_{0i}(t) = m_{ii}(t) \quad \text{и} \quad m_{0i} \dot{x}_i \dot{x}_i = m_{ii} \dot{x}_i^2.$$

Квадратичная форма $2T$ определяет оценку интегральной стоимости всей массы полуфабрикатов и ресурсов, находившихся в процессе обработки в момент времени t .

Аналогом потенциальной энергии или энергии положения является выражение

$$2U = \sum_p k_{ip} (x_i - x_p)^2 \quad (7.47)$$

где

$$\begin{aligned} i &\in \{i\}, \quad p \in \{\{i\} \cup (p=0)\}, \quad x_0 = 0, \\ k_i(t) &= k_{1i}(t) + ik_{0i}(t). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Мощность потока производимой продукции представим в виде

$$2G = \sum_p g_{ip} (\dot{x}_i - \dot{x}_p)^2 \quad (7.49)$$

где

$$\begin{aligned} i &\in \{i\}, \quad p \in \{\{i\} \setminus (p=0)\}, \quad \dot{x}_0 = 0, \\ g_i(t) &= g_{1i}(t) + ig_{0i}(t). \end{aligned}$$

Располагая квадратичными формами $2T, 2G, 2U$ и обобщенными силами, записанными в виде $f_i(t)$, подставим их в оператор

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = f_i(t) \quad (7.50)$$

где $\forall i \in \{i\}$ и запишем уравнение Лагранжа второго рода в виде

$$m \ddot{x}_i + \sum_p g_{ip} (\ddot{x}_i - \ddot{x}_p) + \sum_p k_{ip} (x_i - x_p) = f_i(t). \quad (7.51)$$

В этих уравнениях

$$g_i = g_{1i}(t) + ig_{0i}(t), \quad k_i = k_{1i}(t) + ik_{0i}(t). \quad (7.52)$$

Таких уравнений второго порядка с комплексными коэффициентами получим n , где n – число обобщенных координат системы.

Прежде чем интегрировать такую громоздкую систему уравнений, имеет смысл составить суждение о ее устойчивости.

Для анализа устойчивости системы, описанной уравнениями (7.51), рассмотрим их однородную часть. Общее решение однородной части этих уравнений представим в виде

$$x_i = (x_{1i} + ix_{0i})e^{-i\omega_i t} \quad (7.53)$$

Подставив эти решения в однородную систему уравнений

$$\sum_p g_{ip}(\lambda_p - \lambda_i) + \sum_p k_{ip}(x_i - x_p) = 0, \\ i = 1 \dots n,$$

приравняем коэффициенты при $e^{-i\omega_i t}$, а затем разделив их мнимые и вещественные части, получим $2n$ уравнений второго порядка с действительными коэффициентами.

Введя $2n$ дополнительных переменных, приведем эту систему к четырем n уравнениям первого порядка вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{sl}(t)x_{sl} + \dots + p_{sv}(t)x_{sv}. \quad (7.54)$$

$$s = l, \dots, 4n = v$$

7.10. Устойчивость математической модели, описывающей производственный процесс

Согласно теории А.Ляпунова определение устойчивости уравнений (7.54) с переменными коэффициентами сводится к вопросу о вычислении знака наименьшего характеристического числа какой-либо из полных систем ее независимых частных решений.

Для исследования устойчивости можно воспользоваться теоремой Четаева [7.3].

Теорема. Если в системе линейных уравнений коэффициенты стремятся к определенным пределам C_{sr} при неограниченном увеличении t , то ее нелинейное характеристическое число совпадает с наименьшим характеристическим числом предельной системы уравнений (7.54).

В дальнейшем будем использован прием анализа предложенный Н.Г.Четаевым [7.3], позволяющий применить эту теорему для практических решений.

Суть метода заключается в следующем. Для каждого значения независимой переменной t уравнения

$$\Delta(t) = \|p_{sr} - \delta_{sr}\| = 0 \quad (7.55)$$

определяют v корней $\lambda_1, \dots, \lambda_v$, изменяющиеся с изменением времени.

Если для $t \geq t_0$ не существует целых неотрицательных чисел m, \dots, m_p , равных в сумме 2, и для которых выполняется условие

$$m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_v \quad (7.56)$$

то для таких значений t будет существовать квадратичная форма

$$V = \sum a_{sr}x_s x_r, \quad (a_{sr} = a_{rs}), \quad (7.57)$$

с ограниченными коэффициентами a_{su} , зависящими от t , удовлетворяющая уравнениям с частными производными первого порядка

$$\sum_s \frac{dV}{dx_s} (p_{s1}x_1 + \dots + p_{sp}x_p) = x_1^2 + \dots + x_p^2, \quad (7.58)$$

где t - параметр.

Форма V будет отрицательной, если вещественные части всех корней отрицательны. Если же для некоторых значений переменных x_s она будет положительна, то среди корней x_s существует хотя бы один с положительной вещественной частью и, следовательно, система неустойчива.

Из уравнения (7.58) следует

$$\frac{dV}{dt} = x_1^2 + \dots + x_v^2 + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (7.59)$$

Главные диагональные миноры дискриминанта этой системы имеют вид

$$D_r = \begin{vmatrix} \alpha_1 + 1 & \dots & \alpha_v \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_v + 1 \end{vmatrix} \quad (7.60)$$

$$\text{где } \dot{x}_s = \frac{da_{rs}}{dt}$$

Пусть для всех $t \geq t_0$ производные \dot{x}_s ограничены, а все D_r не меньше некоторого положительного числа, тогда если производная J по критерию Сильвестра будет определенно-положительной квадратичной формой переменных x_1, \dots, x_n , и при условии, что V является определенно-отрицательной квадратичной формой, невозмущенное движение устойчиво. Если при этом форма V допускает бесконечно малый высший предел, то устойчивость невозмущенного движения асимптотична. Если же форма допускает бесконечно малый высший предел, но может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для иллюстрации рассмотрим уравнение однопродуктового предприятия (7.37). (Анализ примера выполнен Т.И.Шейко).

Общая форма уравнения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + E_1(t)\dot{\varphi} + E_2(t)(1 + ik_0)\varphi = f(t).$$

Его однородная часть после подстановки решения в виде

$$\varphi(t) = (x_1(t) + ix_2(t))[Cos(\Theta(t)) + iSin(\Theta(t))]$$

и обозначений

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4$$

принимает вид:

$$\dot{x}_3 = x_3;$$

$$\dot{x}_4 = x_4;$$

$$\ddot{x}_3 = -E_1 x_3 - Mx_1 + Kx_4 + Nx_2; \quad (7.61)$$

$$\ddot{x}_4 = -E_1 x_4 - Mx_2 - Kx_3 - Nx_1.$$

где

$$N = \omega E_1 + E_2 k_0; M = E_2 - \omega^2; K = 2\omega.$$

Для каждого значения независимой χ характеристическое уравнение

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -M & N & -E_1 - \lambda & K \\ -N & -M & -K & -E_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оно является функцией времени. После раскрытия определителя получим уравнение

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (7.62)$$

где

$$a_4 = 1; a_3 = 2E_1; a_2 = E_1^2 + K^2 + 2M;$$

$$a_1 = 2(NK + ME_1); a_0 = M^2 + N^2.$$

Для каждого момента времени t форма V согласно критерию Гурвица будет отрицательна, если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 > 0; \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Эти неравенства после открытия определителя получаю вид

$$D_1 = a_1 = 2(NK + ME_1) > 0;$$

$$D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 2(NK + ME_1)(E_1^2 + K^2 + 2M) - (M^2 + N^2)2E_1 > 0;$$

$$\begin{aligned} D_3 &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = \\ &= 2(NK + ME_1)(E_1^2 + K^2 + 2M)2E_1 - \\ &\quad - 4(NK - ME_1)^2 + (M^2 + N^2)4E_1^2 > 0. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Квадратичные формы V и \mathcal{J} записутся в виде:

$$2V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{dV}{dt} = x_1x_3 + x_2x_4 + x_3(-E_1x_3 - Mx_1 + Kx_4 + Nx_2) - \\ &- x_4(E_1x_4 + Mx_2 + Kx_3 + Nx_1). \end{aligned}$$

В том случае, когда требуется определить предельные значения объема выпускаемой продукции, при которых система теряет устойчивость, для соответствующего момента времени граница устойчивости может быть определена из уравнений

$$D_1 = 0; D_2 = 0; D_3 = 0, \quad (7.65)$$

решенных для всех моментов времени $0 \leq t \leq \tau$, где τ – время функционирования исследуемой системы. В частности, при всех заданных параметрах задача сводится к решению уравнений относительно параметра k_0 в функции времени t . Это решение удобно получить, придавая параметру различные значения.

Определим область допустимых значений коэффициента диссипации k_0 реализующих устойчивое решение.

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 = 2(NK + ME) > 0; \\ D_2 &= a_1a_2 - a_0a_3 = 2(NK + ME)(E^2 + K^2 + 2M) - \\ &- 2(M^2 + N^2)E > 0; \\ D_3 &= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 = 4(NK + ME)(E^2 + K^2 + 2M)E - \\ &- 4(NK + ME)^2 - 4(M^2 + N^2)E^2 > 0; \\ a_0 &= M^2 + N^2 > 0; \\ M &= E_2 - \omega^2; \\ a_1 &= E^2 + K^2 + 2M; \\ K &= 2\omega > 0; \\ a_3 &= 2E > 0; \\ N &= E_1\omega + E_2k_0; \\ a_4 &= 1 > 0; \\ E &= E_1 > 0; \\ K_0 &= \frac{1}{E_2}(N - E_1\omega). \end{aligned} \quad (7.66)$$

Учитывая вид формулы (7.66), найдем те значения N , которые обеспечивают положительность определителей $\{D_i\}, i=1,2,3$.

$$1. NK + ME > 0;$$

$$2. -EN^2 + K(E^2 + K^2 + 2M)N + ME(E^2 + K^2 + M) > 0;$$

$$3. -(K^2 + E^2)N^2 + KE(E^2 + K^2)N + ME^2(E^2 + K^2) > 0.$$

Из первого неравенства следует

$$N^{(1)} > \frac{ME}{K}.$$

Обозначим коэффициенты неравенства 2.

$$E = a_2; K(E^2 + K^2 + 2M) = b_2; ME(E^2 + K^2 + M) = c_2.$$

Напишем уравнение границы устойчивости $D_2 = 0$ в виде

$$-a_2N^2 + b_2N + c_2 = 0. \quad (7.67)$$

Тогда имеем

$$N_{12}^{(2)} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 + 4a_2c_2}}{-2a_2}.$$

Откуда следует, что выражение

$$-a_2N_1^{(2)} + b_2N^{(2)} + c_2 > 0,$$

только при

$$N_1^{(2)} < N < N_2^{(2)}.$$

Из третьего неравенства, так как $K^2 + E^2 > 0$ и в нуль не обращается, имеем:

$$-N^2 + KEN + ME^2 > 0.$$

Обозначив

$$a_3 = 1; b_3 = KE; c_3 = ME^2,$$

получим границу в виде

$$-a_3N^2 + b_3N + c_3 = 0 \quad (7.68)$$

тогда

$$N_{12}^{(3)} = \frac{-b_3 \pm \sqrt{b_3^2 + 4a_3c_3}}{-2a_3}$$

Выражение $-a_3N^2 + b_3N + c_3 > 0$ при $N_1^{(3)} < N < N_2^{(3)}$.

Таким образом, для того, чтобы одновременно D_1, D_2, D_3 были больше нуля, необходимо, чтобы

$$\max\left\{-\frac{ME}{K}, N_1^{(2)}, N_1^{(3)}\right\} < N < \min\left\{N_2^{(2)}, N_2^{(3)}\right\} \quad (7.69)$$

Проведем анализ корней уравнений (7.67) и (7.68). Если $b_2^2 > -4a_2c_2$, то корни $N_{12}^{(2)}$ – действительные. Если $b_3^2 > -4a_3c_3$, то корни $N_{12}^{(3)}$, действительные. Рассмотрим первый из двух дискриминантов

$$K^2(E^2 + K^2 + 2M)^2 > -4(E^2 + K^2 + M)ME^2, \quad (7.70)$$

подставляя значения K, E, M , получим

$$\omega^2(E_1^2 + 2E_2 + 2\omega^2)^2 > -E_1^2(E_2 - \omega^2)(E_1^2 + E_2 + 3\omega^2).$$

Если $E_2 > \omega^2$, то неравенство выполняется всегда, т.к. слева – положительная величина.

Если же $E_2 < \omega^2$, то для того, чтобы корни были действительными, должно выполняться неравенство:

$$\omega^2(E_1^2 + 2E_2 + 2\omega^2)^2 > E_1^2(\omega^2 - E_2)(E_1^2 + E_2 + 3\omega^2). \quad (7.71)$$

Рассмотрим второй дискриминант $K^2E^2 > -4ME^2$. Если $E = E_1 = 0$, мы имеем кратные корни $N_1^{(3)} = N_2^{(3)}$. Если $E \neq 0$, то $K^2 > -4M$, подставляя K и M , имеем:

$$0 > -\omega^2 - E_2 + \omega^2$$

Откуда следует

$$E_2 > 0$$

Итак при $E_2 > 0$ корни уравнения (7.68) действительные.

7.11. Учет брака и отходов производства

В предыдущих разделах мы предполагали, что энтропия вызывает рост затрат на амортизацию и не учитывали того, что рост энтропии происходит и за счет брака и образования отходов. В принципе все эти изменения в технологическом процессе сводятся к замедлению темпа выдачи годной продукции и повышению ее стоимости, а брак и отходы, выведенные в среду, увеличивают рост энтропии. Для учета влияния замедления технологического процесса перепишем уравнение (7.16) в виде

$$g_1(1 + ig_0)x + k_1(1 + ik_0)x = A_0 \sin \omega_0 t. \quad (7.72)$$

В уравнении (7.72) введение члена ig_0 отражает факт изменения скорости роста энтропии продукции с учетом этого обстоятельства.

Введем обозначения, аналогичные обозначениям (7.20) и дополнительные

$$l_\alpha = 1, \quad l_\beta = g_0, \quad k_\alpha = 1, \quad k_\beta = k_0.$$

Перепишем уравнение (7.70) в виде

$$(a + ib)\varphi + (c + id)\varphi = E_4 \sin \omega_0 t,$$

где принятые обозначения

$$E_1 l_\alpha = a; \quad E_1 l_\beta = b; \quad E_2 k_\alpha = c; \quad E_2 k_\beta = d.$$

Представим однородную часть уравнения после подстановки $x = x_1 + ix_2$ в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -cx_1 + dx_2 - ax_3 + bx_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_1 - cx_2 - bx_3 - ax_4. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Определитель этой системы аналогичен определителю (7.24). Развернув его и приравняв его к нулю (по аналогии с (7.26)) получим

$$\begin{aligned} \Delta &= [\lambda(a + \lambda) + c]^2 + (\lambda b + d)^2 \\ \lambda^2 + \lambda(a + ib) + (c + id) &= 0. \end{aligned}$$

Собственные числа

$$\lambda_{1,4} = -(a \mu ib) \pm \left[\left(\frac{a \pm b}{2} \right)^2 - (c \pm id) \right]^{1/2}. \quad (7.74)$$

Учитывая обозначения представим в виде

$$\lambda_{1,4} = -\frac{E_1(l_\alpha \pm il_\beta)}{2} \pm \left[\left(\frac{E_1(l_\alpha \pm il_\beta)}{2} \right)^2 - E_2(k_\alpha \pm ik_\beta) \right]^{1/2}, \quad (7.75)$$

что при $l_\beta = 0$, $l_\alpha = 1$ соответствует условиям (7.29).

Отметим, что в отличие от уравнения (7.17) у уравнения (7.30) четыре комплексных корня. Каждая пара сопряженных корней отличается от другой не только действительными частями, но и мнимыми. Следовательно, у системы, описываемой уравнениями (7.30), возможно наблюдать два резонанса, соответствующие двум мнимым частям корней 1–4, тогда как у систем, где ig_0 равно нулю наблюдается резонанс с силой, частота которой равна мнимой части всех четырех корней.

Пусть

$$l_\alpha E_\lambda = a \neq 0.$$

Граница устойчивости достигается когда в следствие равенства нулю вещественной части корней решение (7.74) делается мнимым. Чтобы найти их значения запишем решения в виде $\lambda = ir$, где $r \in R$ – действительное число. Тогда (7.74) примет вид

$$ir + \frac{(a \pm ib)}{2} = \pm \left[\left(\frac{a \pm rib}{2} \right)^2 - (c \pm id) \right]^{1/2}. \quad (7.76)$$

Возведя в квадрат, получим

$$r^2 -ира + rb = c \pm id. \quad (7.77)$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим

$$-ra = \pm d; \quad r^2 + rb - c = 0, \quad (7.78)$$

откуда

$$r = \mu \frac{d/a}{2} \quad (7.79)$$

$$r_{1,2} = -\frac{b/2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4c}. \quad (7.80)$$

(Так как по условию $0 < \alpha$).

Результат (7.78) совпадает с результатом, полученным в разделе 7.6 при $l_\beta = 0$, $l_\alpha = 1$.

Второе условие – (7.80) при выполнении (7.79) больше нуля, так как $\left| \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4c} \right| \geq \frac{b}{2}$.

Из этого условия следует, что знак (-) можно опустить, если

$$a = E_1 l_1 > 0, \quad c = E_2 k > 0, \quad (7.81)$$

что оговаривалось при составлении модели. Но тогда

$$\frac{d/a}{2} = -\frac{b/2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4c},$$

или

$$d^2 - a^2 c + abd = 0, \quad (7.82)$$

откуда при переходе к начальным обозначениям получим

$$E_2 k_\beta^2 = E_1^2 (k_\alpha l_\alpha - k_\beta l_\beta). \quad (7.83)$$

Представляет интерес проверка влияния соответствующей ig_0 на устойчивость нестационарной системы, описываемой (7.70), когда его коэффициенты являются непрерывными функциями времени t .

Для определения устойчивости поступим по аналогии с анализом уравнения (7.61). Решение этого уравнения ищем в виде

$$\varphi = x e^{i\Theta} = x(t) + ix(t), \quad \Theta = \Theta(t)$$

Подставим в однородную часть уравнения (7.61)

$$\ddot{\varphi} = (x'' + x\Theta')e^{\Theta},$$

$$\ddot{\varphi} = x'' + 2x\Theta' + x\Theta'' + x\Theta'^2$$

и перепишем его после группирования членов в виде

$$(\mathfrak{E}_1 + i\mathfrak{E}_2) + [(2\mathfrak{E} + E_1) + iE_1 g_0](\mathfrak{E} + i\mathfrak{E}_2) + \\ + [(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2^2 + E_1 \mathfrak{E} + E_2) + i(E_1 g_0 \mathfrak{E} + E_2 k_0)](x_1 + ix_2) = 0.$$

Принимая $\mathfrak{E}_1 = x_3$, $\mathfrak{E}_2 = x_4$ и разделив вещественные и мнимые части получим вещественную часть

$$x_3 = -(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1 + E_1 \mathfrak{E} + E_2)x_1 + (E_1 g_0 \mathfrak{E} + E_2 k_0) - (2\mathfrak{E} + E_1)x_1 + Eg_0 x_1$$

и мнимую

$$x_4 = -(E_1 g_0 \mathfrak{E} + E_2 k_0)x_1 - (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_2 + E_1 \mathfrak{E} + E_2)x_2 - E_1 g_0 x_3 - (2\mathfrak{E} + E_1)x_4$$

Обозначим

$$\mathfrak{E} = \omega,$$

$$M = (\mathfrak{E} + \omega^2) + E_1 \omega + E_2,$$

$$N = E_1 g_0 \omega + E_2 k_0,$$

$$E = 2\omega + E_1 = E,$$

$$K = E_1 g_0.$$

Запишем систему в виде

$$\mathfrak{E}_1 = x_3,$$

$$\mathfrak{E}_2 = x_4,$$

$$\dot{\mathfrak{E}}_1 = -Mx_1 + Nx_2 - Ex_3 + Kx_4,$$

$$\dot{\mathfrak{E}}_2 = -Nx_1 - Mx_2 - Kx_3 - Ex_4.$$

Характеристическое уравнение этой системы аналогично уравнению (7.62). Не повторяя преобразований уравнения (7.62), запишем условия устойчивости в виде

$$K^2(E^2 + K^2 + 2M)^2 > -4(E^2 + K^2 + M)ME^2, \quad (7.84)$$

совпадающим с (7.70).

Интересно исследовать влияния члена $iE_1 \mathfrak{E}$ на поведение системы. Для этого сопоставим условия устойчивости (7.29) и (7.83). Отметим, что при $l_\alpha = 1$, $l_\beta = 0$, $E_1 > 0$ условие (7.83) получит вид

$$E_2 k_\beta = 0 < E_1 k_\alpha,$$

что совпадает с условием (7.29).

Далее, из (7.82) следует – при $l_\beta > 0$, $l_\alpha = 1$, $E_1 > 0$ левая сторона неравенства смещается вправо. Следовательно, наличие в уравнении (7.70) $iE_1 \mathfrak{E}$ ухудшает устойчивость.

Таким образом, если при моделировании производственного процесса использовать уравнение (7.72), то с помощью члена $iE_1 \mathfrak{E}$ можно моделировать изменения, происходящие во внешней среде исследуемого объекта за счет брака и отходов. Следовательно, введение в уравнение колебательного контура двух мнимых членов $ik_0 x_0$ и $ig_0 \mathfrak{E}$ позволяет раздельно рассматривать два канала роста энтропии:

- один за счет непроизводительных потерь ресурсов. Это моделируется членом $ig_0 \mathfrak{E}$,

- другой за счет старения и амортизации основного оборудования, моделируемый членом $ik_0 x_0$.

7.12. Применение дифференциального уравнения с одним комплексным коэффициентом для анализа однопродуктового предприятия (численные решения)

Предложенная математическая модель была проверена на адекватность. Численные эксперименты выполнены с целью проверки возможности ее использования для отображения следующих факторов:

1. Влияния на переходные процессы необоснованного исключения начальных условий при интегрировании уравнений огибающей.

2. Влияния законов изменения угловой частоты возмущающих сил на нестационарные процессы.

3. Интеграции нестационарных режимов.

Были просчитаны многие варианты. Ограничимся их качественным описанием и некоторыми иллюстрациями.

1. Расчеты первой группы были произведены при наборах постоянных коэффициентов, гарантирующих выполнение условия устойчивости. Во всех случаях при достаточном запасе устойчивости переходные процессы, возникающие при начальных условиях, хорошо отображали предположения, положенные в основу модели.

На рис. 7.8 изображен типичный график решения, полученный для системы описанной уравнением (7.37), где предполагалось, что круговая частота обобщенной силы изменялась по закону

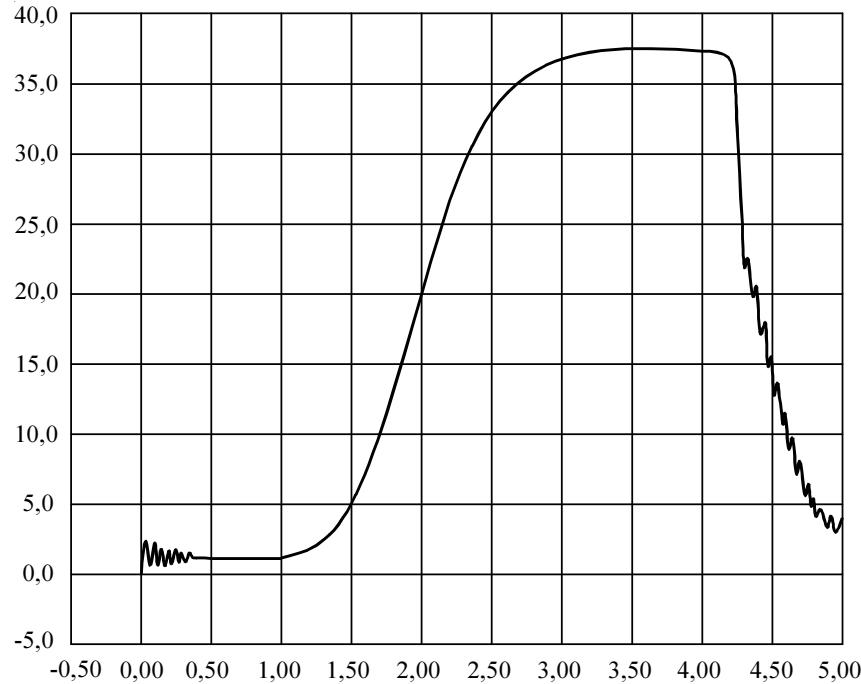


Рис. 7.8. Огибающая переходного процесса при воздействии гармонической функции переменной частоты

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_2 e^{-\kappa_3 t}}, & (t \leq p) \\ \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_2 e^{-\kappa_3 p}} + \frac{\kappa_4}{1 + \kappa_5} - \frac{\kappa_4}{1 + \kappa_5 e^{-\kappa_6 t}}, & (p \leq t < \tau), \end{cases}$$

а параметры системы постоянны.

Значения параметров приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

k_0	E_1	E_2	E_4	κ_0	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	p
0,0258	5	206^2	206^2	0,1	206	206	5	206	206	15	4,2

2. Исследование влияния параметров на устойчивость.

На рисунках приведены переходные процессы, выполненные для систем, где критерии (7.64) удовлетворялись (обозначено $D_i > 0$) и не удовлетворяют ($D_i < 0$). Параметры, характеризующие динамическую систему, приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

№	E_1	E_2	E_4	α	k_0	D_1	№ рисунка
1	20	206^2	206^2	206	0,0258	>0	Рисунок 7.9
2	5	206^2	206^2	206	0,0258	<0	Рисунок 7.10
3	5	206^2	206^2	206	0,05	<0	Рисунок 7.11

Во всех случаях был принят закон изменения частоты со временем $\omega = \alpha t$. Наблюдался переход через состояние резонанса. Коэффициент k_0 был принят равным 0,0258, но E_1 различались: в первом случае $E_1^{(1)}$ равнялся 20, во втором – 5. Как видно из рис. 7.9, здесь наблюдается типичный переход через состояние резонанса, когда амплитуда колебаний обобщенной координаты достигает значения 10 единиц.

На рис. 7.10 приведена огибающая, построенная для неустойчивой системы. Как и в первом случае, при переходе через резонанс на-

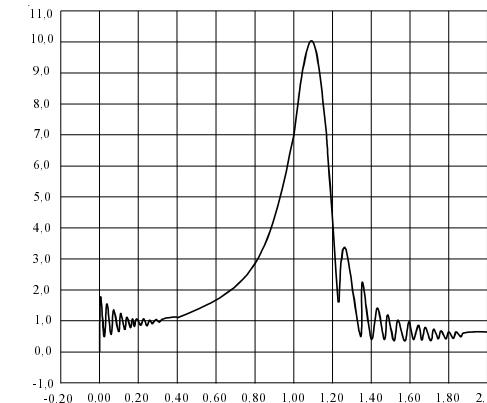


Рис. 7.9. Переход через состояние резонанса при $\forall D_i > 0$ (система устойчива)

блодается повышение и затем спад амплитуды, однако после появления резонанса она с течением времени неуклонно растет.

При более значительной величине коэффициента k_0 возрастание амплитуды настолько стремительно, что явление перехода через резонанс практически не успевает проявиться. См. рис.7.11.

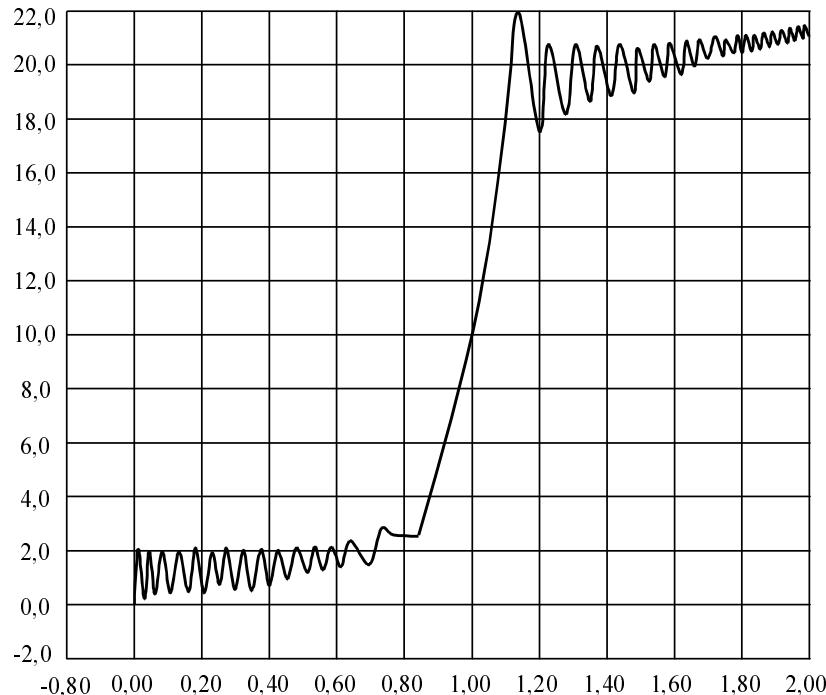


Рис. 7.10. Переход через состояние резонанса, $\exists D_i > 0$ (система неустойчива)

Интересно отметить, что процесс перехода через резонанс позволяет наглядно моделировать картину, наблюдаемую в том случае, когда конъюнктура позволяет предприятию переадресовать продукцию с одного рынка на другой – явление, часто наблюдаемое при запаздывании моды на товары недолговечного спроса в странах, куда мода приходит с опозданием. См. рис. 7.12.

Пример переходного процесса такого рода при параметрах, соответствующих $E_1 = 9$; $E_2 = 948^2$; $E_4 = 948^2$; $\omega = 948t$ изображен на рис.7.12.

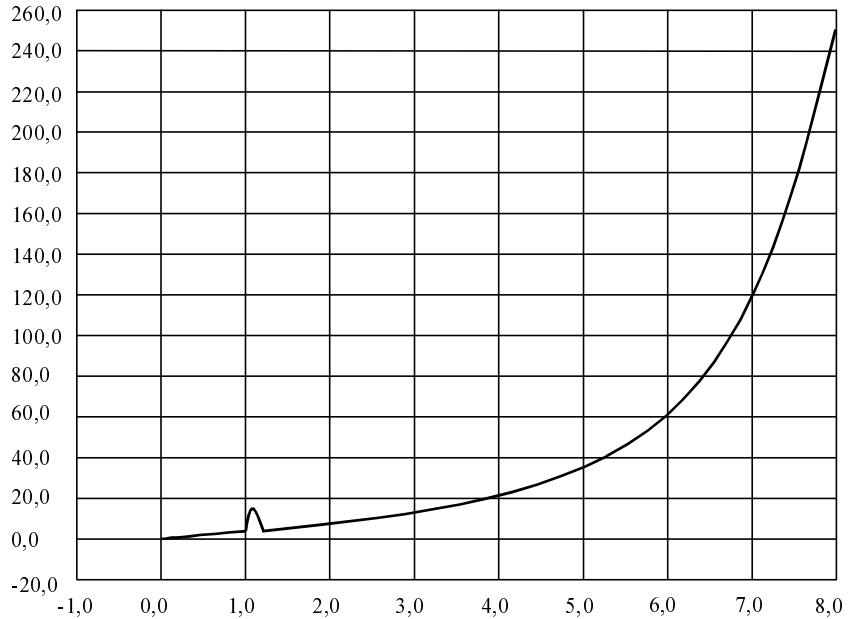


Рис. 7.11. Переход через состояние резонанса при $\forall D_i < 0$ (система неустойчива)

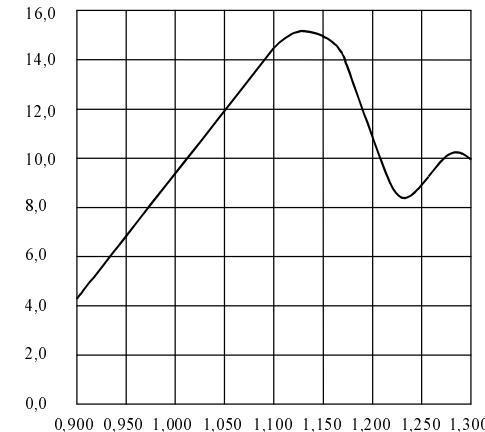


Рис.7.12. Изменение спроса на товар в случае, когда спрос меняется быстро (Переход через резонанс)

7.13. Интерпретация результатов анализа уравнения с одним комплексным коэффициентом

Использование дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами для анализа устойчивости колебаний механических тел впервые было предложено Е.С.Сорокиным и позже использовались А.П.Филипповым и Е.Г.Голосковским для расчета переходных процессов в механических системах. Эти авторы рассмотрели уравнение (7.18) с одним комплексным коэффициентом. Однако при решении ими был допущен произвол, который по нашему мнению привел к принципиально неверным результатам. Для подтверждения сказанного рассмотрим устойчивость решения уравнения (7.18).

Устойчивость и неустойчивость объекта описываемого уравнением (7.18) удобнее всего проиллюстрировать с помощью векторных диаграмм рис. 7.2, построенных для квазистационарных режимов.

Чтобы удостовериться в устойчивости, составим условия равновесия. Они имеют вид

$$k_1 x_0 - m\omega_0^2 x_0 = A \cos \varphi;$$

$$\Delta = g_0 \omega_0 x_0 - k_0 k_1 x_0 = A \sin \varphi.$$

Предположим, что в результате флуктуации любая из величин, входящих в эту систему, например, параметр A , изменяется на малую величину δ . В результате изменится и модуль обобщенной координаты. Это изменение вызовет такое приращение всех векторов, изображающих реакцию, которое и в первом, и во втором уравнении скомпенсирует изменение модуля вектора A . Аналогично флуктуация любого из параметров k_0 , k_1 , g_0 , m_0 , ω_0 , вызовет дополнительную реакцию – приращение всех векторов диаграммы, которая компенсирует флуктуацию.

Совершенно иная реакция будет наблюдаться в случае, где имеет место условие неустойчивости. При неустойчивости вектор $\Delta = g_0 \omega_0 x_0 - k_0 k_1 x_0$ отрицателен. Вследствие совпадения направления вектора Δ и проекции вектора A любой дисбаланс при $\Delta \neq 0$ не может быть устранен. Поэтому наметившаяся разность приведет к неограниченному росту координаты x .

Применительно к моделируемому процессу это означает непрерывный рост потерь на амортизацию, а стало быть к прекращению нормальной работы предприятия и его останов.

Особо следует остановиться на резонансном режиме. При резонансе значение амплитуды устойчивых систем делается почти максимальным. Следовательно разность

$$\Delta = (g_0 \omega_0 - k_0 k_1)x > 0, \quad (7.85)$$

так как в системе имеет место диссипация принимает почти максимальное значение и поэтому скорость производства полезной продукции делается почти максимальной.

Следует обратить внимание на то, что равенство нулю параметра $\Delta = g_0 \omega_0 - k_0 k_1$ возможно в двух случаях: когда одновременно равны нулю оба коэффициента g_0 и $i k_0 x$ и в случае, когда

$$g_0 \omega_0 = |k_0 k_1|. \quad (7.86)$$

В первом случае дифференциальное уравнение (7.17) получит вид

$$\ddot{x} + E_1 \dot{x} = f(t), \quad E_1^2 = \frac{k_1}{m \omega_0^2}$$

и содержит только вещественные части коэффициентов, а коэффициент при $\ddot{x} = 0$. Уравнение частот этого дифференциального уравнения имеет два чисто мнимых корня

$$-p_{12} = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{m_0 \omega_0^2}}.$$

Во втором – уравнение получит вид

$$\ddot{x} + E_2(1 + ik_0)\dot{x} = F(t), \quad (7.87)$$

отличающийся тем, что его частотное решение имеет корни

$$p_{1,2,3,4} = \pm \alpha_{1,2} \pm i\beta_{1,2},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{1+k_0^2}+1}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+k_0^2}-1}.$$

Отсюда следует, что при наличии мнимой составляющей коэффициента k у уровня (7.87) имеются две пары сопряженных собственных чисел, одна из которых устойчивая, а другая – нет.

$$p_{1,2} = -\alpha \pm i\beta \quad (7.88)$$

и

$$P_{3,4} = \alpha \pm i\beta \quad (7.89)$$

Затем автор метода использования уравнения (7.87) Е.С.Сорокин предлагает опустить неустойчивые корни. Эти предложения он основывает на своих опытах, проведенных при испытаниях строительных конструкций [7.1]. Но в таких опытах невозможно исключить другие, не учтенные в уравнениях каналы рассеивания энергии, и поэтому опыты Е.С.Сорокина не могут быть доказательными при анализе устойчивости. Использование этого приема в более поздних исследованиях А.П.Филиппова и Е.Г.Голосококова для анализа явления перехода механических систем через состояние резонанса (например в [7.2] и других) недопустимо. Эти авторы, копируя Е.С.Сорокина, упустили из вида, что системы, описанные уравнением (7.87) неустойчивы по определению. Поэтому все результаты, полученные в их работах, связанные с использованием метода Е.С.Сорокина, должны быть поставлены под сомнение.

Как и в физических объектах при устойчивом режиме, амплитуду при резонансе, достигающую почти максимального значения, можно определить исходя из энергетических соображений.

Для этого определим баланс ресурсов, подведенных к системе и отведенных за один рабочий цикл.

Стоимость ресурсов, затраченных за цикл, равна произведению реакции при выдаче продукции $\pi\Delta = \omega_0 x_0 \Delta$ на обобщенную координату, отличающуюся от него по фазе на $\pi/2$. Следовательно она равна $\pi\omega_0 x_0^2 \Delta$.

Стоимость ресурсов, введенных в систему за тот же цикл равна $\pi A_0 x_0$. Эти соотношения изображены на рис. 7.13. В точке пересечения кривых имеет место условие

$$\pi\omega_0 x_0^2 \Delta = \pi A_0 x_0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{A}{\omega_0 \Delta}. \quad (7.90)$$

Амплитуда x_0 установится сама собой, так как при любой другой амплитуде имеющий место небаланс будет автоматически устранен.

В самом деле, если амплитуда выше резонансной, возникает дефицит ресурсов и амплитуда выдачи продукции уменьшается, если же амплитуда выдачи будет ниже, образуется избыток энергии и выдача будет возрастать, пока не установится равновесное состояние.

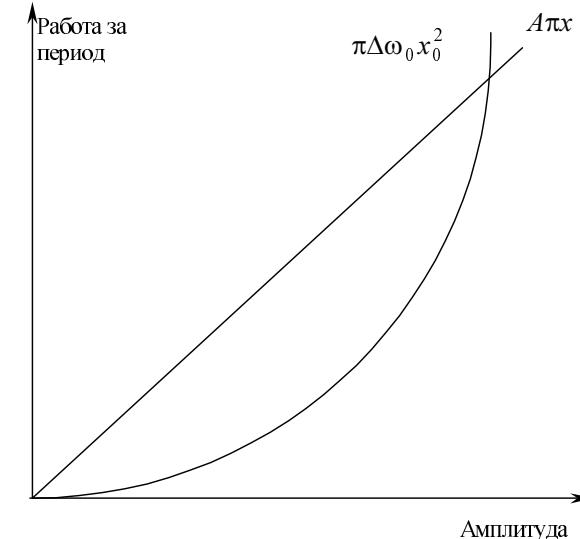


Рис. 7.13. Баланс подводимых и отводимых ресурсов

В неустойчивых системах, где реакция выдачи имеет обратный знак, сумма $\pi\omega_0 x_0^2 \Delta + \pi A x_0$ может обратиться в нуль только при тождественном равенстве нулю обоих слагаемых. В любом другом случае небаланс не только не будет устранен, а будет непрерывно возрастать.

С pragматической точки зрения, это будет означать, что чем больше амортизационные расходы, тем меньше качественной продукции.

7.14. Моделирование автоколебаний в системе производство-стационарный отраслевой рынок

Управление производством является процессом комбинированным, генерированным в результате совместного функционирования технологического процесса и внешней среды. Внешнее управление обычно возникает в результате изменений, при которых предприятие вынуждено адаптироваться к значительным переменам, происходящих в среде, когда требуется коренное изменение свойств производимой продукции. Некоторые такие процессы, связанные с необходимостью менять длительность производственного цикла, рассматривались выше.

Управление, эндогенное, осуществляется тогда, когда предприятие работает на неизменный рынок, когда рост энтропии даже за длительное время не успевает коренным образом изменять свойства технологического процесса, а потребности покупателей изменяются периодически с почти постоянной частотой, например в связи с сезонными явлениями. В этом случае система отраслевой рынок – предприятие может быть рассмотрена как автономная система, работающая в стационарном режиме.

Такая модель позволяет анализировать режимы стабильных автоколебаний, когда периодические изменения в системе возникают автономно.

Физической моделью подобной системы может служить ламповый генератор, подключенный к источнику постоянного тока.

Отметим, что в любой автоколебательной системе обязательным является наличие:

- колебательного звена, имеющего постоянную собственную частоту;
- внешнего источника постоянной энергии;
- замкнутого контура, образующего обратную связь, содержащую элемент с нелинейной характеристикой.

Для моделирования автоколебаний, необходимых в системе предприятие – отраслевой рынок, попытаемся использовать уравнение

$$m\ddot{x} + g_1(1 + ig_0)x + k_1(1 + ik_0)x = 0. \quad (7.90)$$

Уравнение линейно, и поэтому в рассматриваемой форме не может моделировать автоколебания. Кроме того, оно не содержит модели замкнутого контура и обратной связи с нелинейным элементом. В реальной системе все эти составляющие существуют. Для их моделирования в уравнение введем дополнительный член $f(x)$ характеризующий обратную связь, и запишем уравнение в виде

$$m\ddot{x} + g_1(1 + ig_0)x + k_1(1 + ik_0)x = f(x). \quad (7.91)$$

Функция $f(x)$ должна содержать нелинейный член, моделирующий особенности производственного процесса.

7.15. Математическая модель системы производство – отраслевой рынок

Чтобы составить уравнения, описывающие динамику функционирования монопродуктового предприятия, необходимо разобраться с природой обобщенной силы, моделирующей обратную связь. Прежде всего отметим, что в уравнении (7.91) она обозначена $f(x)$. Посредством этого члена моделируется замыкание контура, без которого автоколе-

бания невозможны. Содержательно он должен выражать технологический процесс, который мы обычно описывали с помощью производственной функции. Вводя обратную связь учтем, что в рыночной системе стоимость балансирует затраты на производство и компенсацию потерь за счет дохода, получаемого от реализации продукции, поставляемой на рынок. Доход же определяется произведением

$$D(t) = \xi(t) \int_0^t g_1(t) dt = \xi \bar{x}, \quad (7.92)$$

где $\xi(t)$ – коэффициент прибавочной стоимости, определяемый рыночной конъюнктурой.

Таким образом, модель системы производство – рынок образует замкнутый контур, где существует обратная связь, знак и величина которой определяются рыночной конъюнктурой и производственной функцией.

На рынке ее величина формируется в результате суммирования стоимости трех подпотоков, на которые разделяется стоимость готовой продукции.

В сложном переплетении технологических и рыночных процессов, образующих базис современной экономики, эти подпотоки образуются автоматически.

Один из них предназначается для непосредственного потребления. Эта часть готовой продукции после ее реализации и использования потребителем разрушается и превращается в отходы. Его реализация приводит к росту энтропии во всей экономической системе. (Рост энтропии, вызванный этим процессом во внешней среде в уравнении (7.91) не отражен, так как он происходит вне моделируемого объекта). Но в уравнении, описывающем функционирование предприятия, эта часть должна быть компенсирована введениями ресурсов, приобретаемых за счет стоимости выпускаемой продукции.

Вторая часть в качестве обновленных ресурсов поступает на повторные переделы в виде полуфабрикатов и комплектующих так же поставляемых на рынок. Ее стоимость так же определяет полезную деятельность предприятия и как стоимость первой части, в процессе производства компенсируется за счет дохода, полученного на рынке.

Обратим особое внимание на третью часть – обычный спутник рыночной конъюнктуры. Речь идет о избытках полноценной продукции, невостребованной рынком. Ее накопление на складах обычно имеет негативное значение. Неизбежность перепроизводства определяется природой свободного рынка, на котором производители стремятся захватить доминирующие позиции. Безоглядная погоня за максимальной, сиюминутной, прибылью заставляет менеджеров всемерно фор-

сировать выпуск новой продукции. Организаторы производства, наложивая эффективный технологический процесс, в спешке выпускают джина перепроизводства и при необходимости сворачивания объема продаж оказываются его пленниками. Инерция налаженного процесса, – неиспользованная остаточная мощность, накопленные заделы и избыточные ресурсы вместе с нереализованной продукцией, лишают предприятие возможности адекватно среагировать на конъюнктуру. Дефицит, ликвидация которого стимулирует производство, меняет знак. Соответствующим образом меняется знак обратной связи. Она из стабилизирующей превращается в положительную. Дополнительные средства, вводимые в производство, из полученных на рынке доходов идут на ускорение роста невостребованных запасов и приводят к невосполнимым потерям. По сути дела это еще один канал, через который проходит рост энтропии в системе производство-рынок.

Прямыми результатами перепроизводства является избыток рабочей силы и вызываемые им нежелательные социальные сдвиги, расшатывающие стабильность системы.

Из изложенного следует, что помимо обобщенных сил, обеспечивающих полезную деятельность предприятия, в состав обобщенных сил должен быть включен компонент, компенсирующий рост энтропии. Так как обобщенные силы формируются за счет обратных связей из доходов предприятия, возмещение и этих, приносящих убыток, затрат компенсируется частью доходов, получаемых за реализацию полезной продукции. Поэтому в зависимости от конъюнктуры результирующая обратная связь определяется соотношением доходов и издержек может менять знак.

Обозначим $(^e)G(x)\delta$ член, моделирующий стабилизирующую обратную связь, идущую на поддержание полезной деятельности, и $(^i)G(x)\delta$ – обратную связь, моделирующую обобщенную силу, предназначенную для уравновешивания реакции, вызванной ростом энтропии. Уравнение (7.91) с учетом этих членов получит вид

$$m(t) + g_i(t)(1+ig) + K_1(t)(1+iK_0(t))x = -(^e)G(x) - (^i)G(x)\delta, \quad (7.93)$$

где $(^e)G(x)\delta$ – обобщенная сила, моделирующая отрицательную обратную связь. Она выражает рассеяние средств, затраченных на производство продукции; $(^i)G(x)\delta$ – член, моделирующий силу, вызванную наличием положительной обратной связи, компенсирующей потери.

Как видно из выражения, определяющего величину дохода $\bar{D}(t)$, обе формы обобщенных сил $(^e)G(x)\delta$ и $(^i)G(x)\delta$, моделирующих

обратную связь, являются некоторой долей дохода, которую в дальнейшем обозначим

$$G(x)\delta = c\bar{D}(x) = cx, \quad (7.94)$$

где c – коэффициент, показывающий стоимость части продукции, инвестируемую через контур обратной связи.

Рассматриваемая система, описываемая уравнением (7.91), является разновидностью неконсервативных систем, отличающихся тем, что в большинстве многоэтапных технологических процессов количество средств, отдаваемых из внутренней среды во внешнюю в течение единицы времени значительно меньше стоимости средств, сконцентрированных во внутренней среде, где предметы труда из одного вида преобразуются в другой. Иначе говоря, текущее количество ресурсов, энергии, вещества, участвующих в производственном процессе, значительно превосходит стоимость энергии (вещества), превращенных в продукцию и рассеянную во внутренней среде и на рынке. С этим утверждением нетрудно согласиться, если вспомнить, что на большинстве современных предприятий в любой момент времени стоимость ресурсов, находящихся в переделе, во много раз превосходит стоимость текущего объема продукции, поставляемой на рынок, плюс стоимость объема ресурсов, обращающихся в отходы.

Следствием принятых предположений является допустимость условий

$$|G(x)\delta| \ll |m\delta|_{\max} \approx |Kx|_{\max}, \quad (7.95)$$

имеющих место в периодическом рабочем режиме. Такие системы в механике называются томпсоновскими.

Оценивая обобщенную силу обратной связи $G(x)\delta$ нужно иметь в виду еще одно уже отмеченное положение. Количество производимой продукции определяется скоростью изменения обобщенной координаты x . Поэтому, естественно, и закон поступления ресурсов в систему через контур обратной связи выразить через скорость изменения обобщенной координаты x .

Между текущей стоимостью ресурсов, преобразованных в готовую продукцию, и стоимостью продукции существует жесткая зависимость, которую мы назвали производственной функцией $\Pi(x)$.

В дальнейшем для того, чтобы избежать громоздких обозначений, будем считать, что стоимость произведенной продукции равна доходу, полученному от реализации продукции на рынке. Принятое предположение нисколько не влияет на ход последующих рассуждений, но позволяет исключить дополнительный коэффициент, учитывающий конъюнктуру, которая в рассматриваемом стационарном режиме предполагается постоянным.

Обобщенная сила $G(x)$, вызванная действием обратной связи, является частью стоимости произведенной продукции, выраженной через скорость обработки ресурсов. В зависимости от знака обратной связи она моделирует рассеяние или поступление средств из среды.

Примечание. Предложенная схема обратной связи предполагает, что во внешней среде (рынке) существует источник ресурсов, из которого объект (предприятие) может при необходимости черпать энергию, достаточную для поддержания установившегося режима. Стоимость ресурсов оплачивается за счет дохода, который предприятие получает в процессе реализации произведенной продукции. Такая структура обратной связи позволяет автоматически компенсировать затраты энергии (ресурсов).

В силу того, что емкость рынка по сравнению с количеством ресурсов, находящимся в переделе, велика, при расчете процессов, протекающих во внутренней среде предприятий, будем считать емкость рынка величиной постоянной, не зависящей от объема продукции, производимой отдельным предприятием.

Производственная функция при колебании процесса в близких окрестностях рабочей точки может быть аппроксимирована многими способами. В предыдущих главах она приближалась степенной функцией, которая при обозначении $\rho \equiv x$ принимает вид $\Pi = ax^\alpha$. Здесь же ее целесообразнее представить функцией

$$\Pi(x) = \beta x - \frac{\gamma}{3} x^3, \quad (7.96)$$

где $\beta \equiv g_i$, а ее крутизна

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \beta - \gamma x^2. \quad (7.97)$$

В выражении (7.96) β_T и γ параметры, характеризующие технологический процесс. Тогда обобщенная сила

$$G(x) = \frac{d\Pi}{dx} \propto (\beta - \gamma x^2) \propto.$$

Такое представление производственной функции отличается от написания в формуле (5.9). Отличие вызвано тем, что функция (5.12) отражает особенности производства без учета динамических процессов, связанных с регулярной перестройкой производства обязательной и в стационарных режимах, когда происходит смена модификаций производственной продукции, требующая перенастройки и восстановления оборудования.

В режимах перестройки часть ресурсов затрачивается на совершенствование технологического процесса. Поэтому несмотря на увеличение затрат ресурсов объем выпускаемой продукции по мере развития перестроек процессов обычно уменьшается. Процесс накопления ресурсов во внутренней среде в этих условиях приводит к образованию последующего цикла, который вызван созданием новой продукции. После завершения предыдущего цикла объектом производства делается новая модификация продукции, производственный цикл которой повторяет цикл производства продукта, снятого с производства, рис. 7.14.

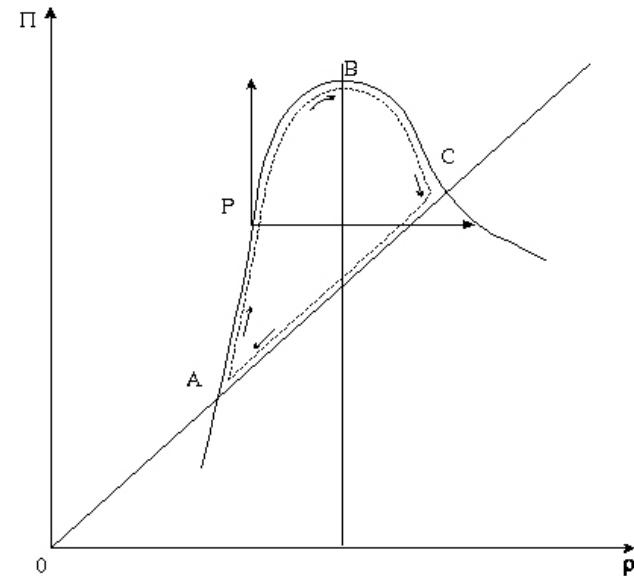


Рис. 7.14. Производственная функция (7.96) (Циклы процессов)

Именно эти особенности стационарного производственного процесса отражены в функции (7.96) графически изображенной на рис. 7.14, где показано, что после достижения положения, изображенного точкой C , старая продукция снимается с производства. В связи с этим резко сокращается затрата ресурсов. Изображающая точка из положения C перескакивает в положение A и затем, по мере налаживания производства, увеличивается выпуск до точки B , когда начинается работа над новой модернизацией товара. (В точке B , несмотря на увеличение расхода ресурсов, объем выпускаемой продукции начинает уменьшаться). Цикл заканчивается с приходом изображающей точки в положение C , когда старая продукция полностью замещается новой.

С учетом соотношений (7.94) и (7.97) перепишем уравнение (7.93) в виде

$$m(t)x - (\beta + \gamma x^2)x + ig_0(t)x + k_1(t)(1 + ik_0(t))x = 0$$

При написании этого уравнения предполагается, что начало координат расположено в точке P (рабочей точке процесса, см. рис.7.14).

7.16. Автоколебания в системе отраслевой рынок – монопродуктовое предприятие

При составлении управления (7.91) предполагалось, что в рассматриваемой модели одновременно действуют следующие факторы, определяющие ее неконсервативные свойства:

- рост энтропии за счет образования отходов – член ig_0x ;
- накопление задела k_1x ;
- выдача готовой продукции (представлена членом уравнения g_1x);
- рост энтропии во внутренней среде за счет износа и старения оборудования (член ik_1k_0x);
- обратная связь, объединяющая процессы во внутренней и во внешней средах, – представлена в уравнении членом $G(x)$, который в зависимости от знака дефицита может быть и больше и меньше нуля, она обозначена нелинейным членом $(\beta - \gamma x^2)G(x)$. Из общей теории систем известно, что в таких объектах автоколебания возможны, если учесть запаздывание в контуре обратной связи.

Мы уже упомянули, что такие системы в теории колебаний называются томпсоновскими.

Обычно в томпсоновских системах запаздывание возникает благодаря наличию инерции, поэтому, при уточнении системы уравнений в модели учтем инерцию, вызванную рыночными процессами.

Теперь ее блок-схема получит вид, изображенный на рис.7.15, где обратная связь между предприятием и рынком осуществляется не через два, а через три канала. Два из них уже рассматривались. Они представлены членом $(\beta - \gamma x^2)G(x)$. Это часть доходов, которая формируется без запаздывания до реализации товаров, например, в случае предоплаты. В состав $G(x)$ входят и средства, предназначенные для компенсации издержек, которые вызываются необходимостью оплатить стоимость невостребованной продукции, накопленной при перепроизводстве на складах.

Стоимость же третьей возвращается на предприятие с некоторым запаздыванием, вызванным процессом реализации продукции на рынке.

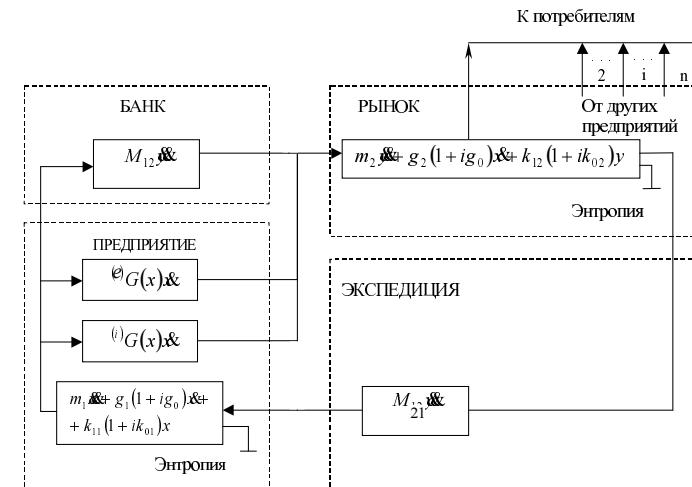


Рис. 7.15. Блок схема системы производственное предприятие рынок

В модели эта часть обобщенной силы поступает к блоку предприятие через отдельный канал, представленный уравнением рынка

$$m_2 + g_{21}(1 + ig_{20})x + k_{21}(1 + ik_{20})y = -M_{21} \quad (7.99)$$

где M_{21} – коэффициент инерции той части продукции, которая находится в сфере обмена. (Она уже поступила на рынок, но пока не оплачена заказчиком); $g_{21} = (g_{21} + ig_{20})$ – коэффициент, характеризующий скорость реализации этой продукции; $k_{21} = 1/c_{21}$ – представляет величину обратную емкости складов продукции на рынке; ig_{20} , ik_{20} – коэффициенты, моделирующие процесс роста энтропии на рынке, (потерю кондиций, старение, усушку, утряску, и т.д.); M_{21} – коэффициент, представляющий задержку движения продукции, вызванной ее экспедицией.

Все изменения, вызванные процессами, имеющими место на рынке, отражаются в структуре уравнения предприятия тем, что помимо обобщенной силы, представленной членом $G(x)$, в контур обратной связи включается член M_{12} , представляющий задержки в поступлении оплаты, вызванные банковскими операциями.

Прежде чем продолжить анализ полученной модели напомним, что в работе моделируется стационарный, наложенный процесс, при котором параметры системы принимаются постоянными. Тогда уравнения системы с учетом влияния рынка примут вид

$$m_1 \ddot{x} + (-\beta + \gamma x^2) \dot{x} + ig_{10}x + k_{11}(1 + k_{10})x = -M_{12}y, \quad (7.100)$$

$$m_2 \ddot{y} + g_{21}(1 + ig_{20}) \dot{y} + k_{12}(1 + ig_{20})y = -M_{21}x. \quad (7.101)$$

Здесь член $M_{12} = M_{21}$ отражает взаимное влияние рыночного и производственного процессов.

Полученная система уравнений с учетом комплексности коэффициентов имеет восьмой порядок. Общее исследование такой системы нелинейных уравнений затруднительно и, главное, ненаглядно. Для наглядности анализа желательно не слишком загружая модель понизить ее порядок.

Учитывая, что рассматриваемый объект относится к системам томсоновского типа, сделаем предположение о том, что энтропийные процессы здесь идут замедленно и не определяют общей динамики функционирования системы в квазистационарном режиме. На этом основании принебрежем членами $ig_{10}x$, $ig_{20}y$, $ik_{10}x$, $ik_{20}y$. Тогда уравнения получат вид

$$1. m_1 \ddot{x} + G(x) \dot{x} + K_{11}x + M_{12}y = 0, \quad (7.102)$$

$$2. m_2 \ddot{y} + g_2 \dot{y} + K_{21}y + M_{21}x = 0,$$

$$\text{где } G(x) = (-\beta + \gamma x^2).$$

Окончательно уравнение системы запишем в виде:

$$1. m_1 \ddot{x} + (-\beta + \gamma x^2) \dot{x} + K_{11}x + M_{12}y = 0, \quad (7.103)$$

$$2. m_2 \ddot{y} + g_2 \dot{y} + K_{21}y + M_{21}x = 0.$$

Предполагая, что система близка к консервативной, первое приближение решения ищем в виде

$$x = a \sin \omega t, \quad (7.104)$$

$$y = b \sin \omega t - e \cos \omega t,$$

где a, b и e для стационарного процесса постоянны, а для периода установления – величины, изменениями которых за период гар-

монических функций можно пренебречь (по сравнению с их средними значениями за период).

Подставим решение (7.104) в уравнения ((7.103) и выделим члены, представляющие консервативные части системы, для чего к первому уравнению системы (7.103) прибавим $\omega^2 x - \omega^2 x = 0$ и ко второму $\omega^2 y - \omega^2 y = 0$, а также введем обозначения

$$\beta = 2\delta_0, \gamma = 2\delta_1, g_2 = 2\delta_2,$$

$$\alpha_1 = \frac{M_{12}}{m_1}, \alpha_2 = \frac{M_{21}}{m_2}, v_1^2 = \frac{K_{11}}{m_1}, v_{12}^2 = \frac{K_{21}}{m_2} \quad (7.105)$$

(v_1 и v_2 соответственно парциальные частоты колебаний на предприятии и на рынке).

Перепишем уравнения в окончательном виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - v_1^2)x + 2(\delta_0 - \delta_1 x^2) - \alpha_1 y = \Phi_1,$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = (\omega^2 - v_2^2)y - 2\delta_2 x - \alpha_2 x = \Phi_2, \quad (7.106)$$

где Φ_1 и Φ_2 можно трактовать как обобщенные силы, действующие на консервативные контуры \ddot{x} и \ddot{y} .

7.17. Колебания в системе предприятие – отраслевой рынок

Полученная математическая модель полностью идентична дифференциальным уравнениям, использованным еще в 1944 году К.Ф.Теодорчиком [7.4] для описания автоколебаний, возникающих в ламповом генераторе, работающем на индуктивную нагрузку. Эта система была им исследована в работе [7.4]. Так как ее решение имеет значение для анализа волновых процессов в технико-экономических системах, ниже приводится изложение результатов, проведенных в работе [7.4], которая в наше время стала библиографической редкостью.

Рассмотрим силы Φ_1 и Φ_2 . Их можно трактовать как суммы обобщенных сил, действующих на входе предприятия и рынка соответственно.

Разложим полученное значение обобщенных сил $\zeta \Phi_1$ и $\zeta \Phi_2$ в усеченный ряд Фурье и запишем

$$\ddot{\omega}_0^2 x \approx f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t + \dots \quad (7.107)$$

$$\omega^2 y \approx f_3 \cos \omega t + f_4 \sin \omega t + \dots,$$

где $f_i = f_i(a, b, e, \omega), \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

После установления автоколебаний приращение амплитуд и изменения частоты должны равняться нулю.

Следовательно, в стационарном режиме должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega}(a, b, e, \omega) = 0, \\ \frac{db}{dt} &= \frac{1}{2\omega}(a, b, e, \omega) = 0, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{2\omega}(a, b, e, \omega) = 0, \\ f_2(a, b, e, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Применим к системе (7.106) условия стационарности получат вид

$$\begin{aligned} 1. \quad &(\omega^2 - v_1^2)a + \alpha_1 b \omega^2 = 0, \\ 2. \quad &2\delta_0 a - \frac{1}{2}\delta_1 a^3 - \alpha_1 e \omega = 0, \\ 3. \quad &2\delta_2 b \omega + (\omega^2 - v_1^2)e = 0, \\ 4. \quad &2\delta_2 e \omega - (\omega^2 - v_2^2)b - \alpha_1 \omega^2 a = 0. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Решив уравнения, имеем:

$$1. \quad b = -\frac{\omega^2 - v_1^2}{\alpha_1 \omega^2} a,$$

$$2. \quad a = 2 \left(\frac{\delta_0 - \delta_2 \frac{\omega^2 - v_1^2}{\omega^2 - v_2^2}}{\delta_{II}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.110)$$

$$3. \quad e = -\frac{2\delta_2 \omega}{\omega^2 - v_2^2} b = \frac{2\delta_2 (\omega^2 - v_1^2)}{\alpha_1 \omega (\omega^2 - v_2^2)} a,$$

а также уравнение для определения частоты колебаний

$$4. \quad \{ \omega^4 (1 - \alpha_1 \alpha_2) - \omega^2 (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 v_2^2 \} (\omega^2 - v_2^2) + 4\delta_2^2 \omega^2 (\omega^2 - v_1^2) = 0. \quad (7.111)$$

Из полученного решения (7.109), (7.110) можно различить три случая:

I. $\delta_2 < \delta_0$.

В этом случае вдали от резонанса автоколебания могут происходить только с частотой, ближайшей к парциональной частоте $v_i, i = 1, 2$. Вблизи же от синхронизма, условия самовозбуждения выполняются в некоторой области для обеих частот. Частота устанавливается в зависимости от предыстории процесса. (В радиотехнике это явление носит название затягивания). См. рис. 7.16 а,б.

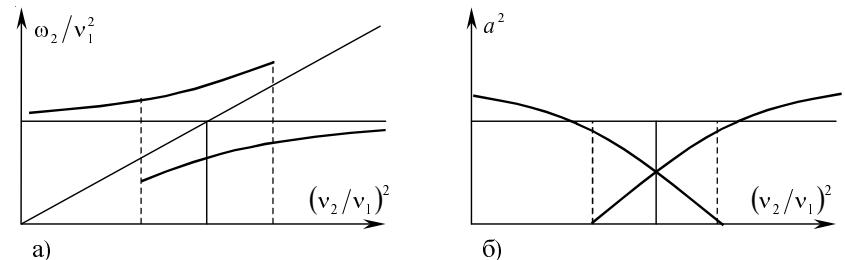


Рис. 7.16. Случай $\delta_2 < \delta_0$

II. $\delta_2 = \delta_0$.

В этом случае затягивания нет и в точке синхронизма колебания погасают. См. рис. 7.17а,б.

III. $\delta_2 > \delta_0$

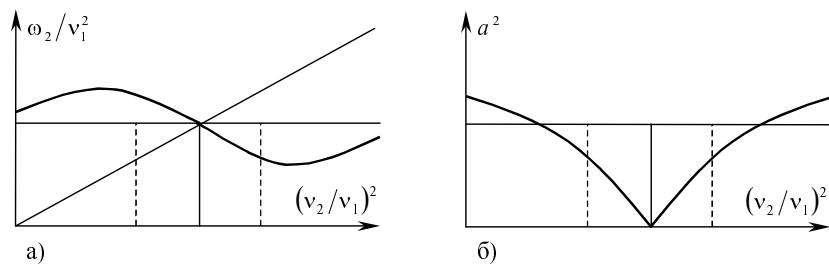


Рис. 7.17. Случай $\delta_2 < \delta_0$

Гашение колебаний происходит ранее наступления синхронизма, затягивание отсутствует. См. рис. 7.18а,б.

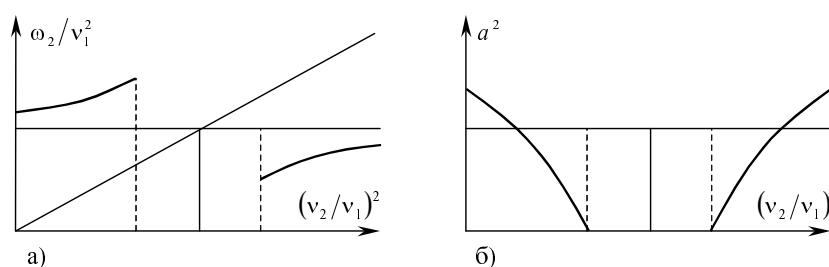


Рис. 7.18. Случай $\delta_2 < \delta_0$

7.18. Учет влияния коэффициентов взаимной связи между элементами системы

Полученные выше результаты не подтверждаются при численном моделировании системы. В некоторых случаях, в режимах 2 и 3, не происходит срыва колебаний.

Для исследования этого несоответствия было произведено исследование влияние коэффициентов взаимной связи α_1, α_2 . Чтобы снять это противоречие для режимов 2 и 3 следуя [7.4] преобразуем выражение амплитуды автоколебаний а при помощи условия частот (7.111) приведем к виду:

$$a = \sqrt{\frac{\delta_0 - \frac{\alpha_1 \alpha_e \omega^2 - (\omega^2 - v_1^2)(\omega^2 - v_2^2)}{4\omega \delta_e}}{\delta_{11}}}. \quad (7.112)$$

В этой форме выражение амплитуды автоколебаний в явном виде проявляются с помощью условия

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{m_1^2}{M_{12} M_{21}}$$

Рассмотрение этого выражения позволит выяснить поведение системы вблизи синхронизма.

Действительно, пусть $v_1 = v_2 = v$. Уравнение частоты (7.111) дает для этого, синхронного, случая

$$(\omega^2 - v^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2 - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4 (\omega^2 - v^2) = 0. \quad (7.113)$$

Отсюда видно, что необходимо различать две области величины связи.

Первая область

$$\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_{kp}^2, \text{ где } \alpha_{kp}^2 = \frac{2\delta}{v}. \quad (7.114)$$

В этой области уравнение частоты (7.113) имеет единичное действительное значение

$$\omega = v. \quad (7.115)$$

Амплитуда автоколебаний при этом в момент синхронизма согласно (7.112) и (7.115) равна

$$a = \sqrt{\frac{\delta_0 - \delta_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{kp}^2}}{\delta_{11}}}.$$

Выражение это при достаточно малой связи всегда больше нуля и, следовательно, гашение колебаний отсутствует. Имеют место лишь отсасывания колебательной энергии из подсистемы предприятия в подси-

стему рынок и соответствующее ему уменьшение амплитуды автоколебаний. Минимум резонансной кривой имеет место при синхронизме ($\omega = v$). Тушение колебаний имеет место только в случае, когда

$$\frac{\delta_0}{\delta_2} < \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_{kp}^2}.$$

При $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_{kp}^2$ уравнение частот имеет тройной корень $\omega = v$

Отсюда начинается вторая область

$$\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_{kp}^2$$

в которой уравнение частот имеет три действительных корня $\omega_1 < \omega_2 = v < \omega_3$

и автоколебания не гасятся.

Таким образом из проделанного анализа следует, что производственное предприятие работающее на рынке является автоколебательной системой.

7.19 Содержательная интерпретация полученных результатов

Идеальный руководитель – это тот руководитель, длительное отсутствие которого на предприятии не замечают.

Из директорского фольклора

Рассмотрим одно поколение товара, произведенного на предприятии, поставляющего продукцию на рынок. Постольку, поскольку мы предположили, что предприятие выпускает изделия одного поколения, можно принять, что экономические параметры, характеризующие систему, производящую эти товары, в течение жизненного цикла продукции всего поколения, меняются мало. Тогда основным фактором, определяющим сдвиги в производственной деятельности предприятия, является спрос, диктующий смену модификаций изделий. Но в рассматриваемом случае структура производственного процесса при смене модификаций почти не меняется. Соответственно в математической модели, представленной уравнением (7.106), эти измененияказываются в незначительном изменении параметров

$\delta_0, \delta_1, \delta_2$, представляющих скорость процесса производства. Следовательно, рассматриваемый автоколебательный процесс в общем случае нестационарен, но изменение его параметров в течение рассматриваемого промежутка времени существования одного поколения товара происходит медленно.

Последнее означает, что интегрирование дифференциальных уравнений возможно производить по этапам, в течение которых изменением параметров можно пренебречь, см. [7.5].

В дальнейшем длительность этапа будет приниматься равной средней длительности жизненного цикла продукции одной модификации. Такая ситуация наблюдается во многих автоколебательных системах.

Если же желательно получить более точные результаты и выделить для анализа отдельные циклы, рекомендуется использовать численные методы интегрирования уравнений (7.100) и (7.101).

Математическая модель, составленная для смены поколений продукции, должна быть такой же, какой является модель процесса смены модификаций.

Таким образом, предложенная выше модель весьма обща, а ее структура при анализе динамических процессов рассмотренного типа инвариантна. Отличие заключается в конкретной интерпретации физических параметров. Поэтому, моделируя волновые процессы, вызванные сменой поколений, можно только идентифицировать физические явления, возникающие в процессе смены поколений, но не менять структуру модели.

Процесс смены поколений сопряжен и с затруднениями другого плана. Организатор производства, принимающий решение о коренной смене продукции, планируемой к выпуску, прежде всего, вынужден выбрать новое направление развития. Спектр возможных решений в большинстве случаев весьма обширен. К сожалению, математическая модель не в состоянии подсказать рациональное решение. Иначе говоря, модель может только констатировать, что система подошла к точке бифуркации.

В условиях, когда система находится в состоянии бифуркации, мера оптимальности принимаемых решений определяется интуицией человека – фактором, моделируемым в точке бифуркации случайной функцией.

Исследованная выше модель не содержит членов, характеризующих энтропийные процессы, как во внутренней среде предприятия, так и во внешней, для предприятия – среде рынка.

Примечание. Влияние комплексных членов рассматривалось при решении задачи с помощью компьютера численным методом (см. разделы 7.13, 7.14).

Построена модель, описывающая динамику технико-экономических процессов, протекающих в системе монопродуктовое предприятие – отраслевой рынок, функционирующий в стабильном режиме.

Показано, что волновые процессы, возникающие при смене модификаций продукции одного поколения, имеют автоколебательную природу.

Получены условия возникновения и гашения автоколебаний.

В этих идеальных режимах предприятие может работать без вмешательства директора и перестраиваться автоматически.

Утверждается, что смена поколений продукции сопровождается возникновением состояния бифуркации, когда возможной траектории развития определяется случайным фактором – волей человека, принимающего решение и тут без вмешательства директора обойтись нельзя.

Если же желательно получить более точные результаты и выделить для анализа отдельные циклы, можно рекомендовать численное интегрирование уравнений (7.100), (7.101). Следовательно, математическая модель, составленная для описания порядка смены поколений продукции, должны быть такой же, какой является модель процесса смены модификаций. Таким образом, предложенная выше модель весьма обща, а ее структура инвариантна. Отличие же заключается в конкретной интерпретации физических параметров. Поэтому, моделируя волновые процессы смены поколений продукции, нужно предварительно идентифицировать явления, имеющие место при смене поколений, но не менять структуру модели.

Резюме

Разработана модель, описывающая переходные и установившиеся процессы производственных систем, позволяющие учсть динамические явления, связанные с ростом энтропии.

В частности, предложены уравнения динамических процессов, составленные с учетом потерь от брака и амортизационных издержек.

На примерах показано влияние этих факторов на устойчивость процессов.

Построена модель, на которой подтверждена автоколебательная природа процесса высокочастотных колебаний на уровне производства, работающего на стабильный рынок.

Цитированные источники

- 7.1. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих колебаний зданий.– М.: Гостехиздат, 1956.– 340с.
- 7.2. Голосков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания динамических систем.– К.: Наукова думка, 1977.– 337с.
- 7.3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения.– М.: Гостехиздат, 1955.– 207с.
- 7.4. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные движения.– М.: ОГИЗ, 1944.–103с.
- 7.5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.– М.: ГИФМЛ, 1959.–915с.